Kapitel VII

Einige spezielle stetige Verteilungen

D. 7. 1. (***Normalverteilung***)
Eine stetige Zufallsgröße X sei als *normalverteilt* bezeichnet, wenn sie folgende *Wahrscheinlichkeitsdichte* besitzt:

$$f(x;\mu,\sigma) = \frac{1}{\sigma}\cdot\varphi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

$$= \frac{1}{\sigma}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \qquad x \in R^1$$

S. 7. 1.
Eine normalverteilte Zufallsgröße X hat die *Verteilungsfunktion*

$$F(x;\mu,\sigma) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,dt, \qquad x \in R^1.$$

B. 7. 1.
Auf dem alten 10-DM-Schein sah man Karl F. Gauß mit der Formel der Dichtefunktion einer normalverteilten Zufallsgröße und deren graphische Darstellung (die sog. Gaußsche Glockenkurve):

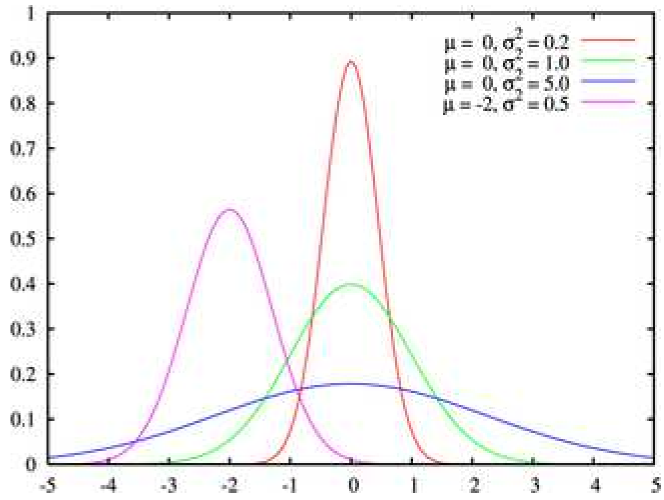
S. 7. 2.
Für eine normalverteilte Zufallsgröße gilt:

$$E(X) = \mu,$$

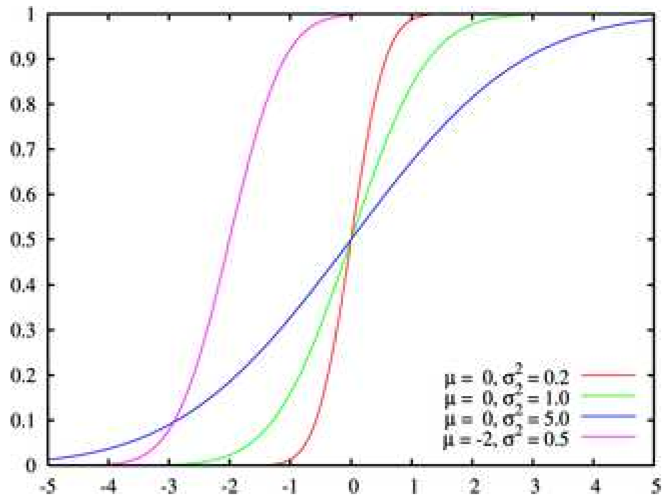
$$D^2(X) = \sigma^2.$$

B. 7. 2.
Die nachfolgenden Graphiken zeigen die Wahrscheinlichkeitsdichte bzw. die Verteilungsfunktion der Zufallsvariable X für verschiedene Werte von μ und σ^2:

Dichtefunktion



Verteilungsfunktion



B. 7. 3.*(Einige wichtige Eigenschaften der Dichtefunktion)*
Die Dichtefunktion einer normalverteilten Zufallsvariable X besitzt unter anderem folgende Eigenschaften:

1. Die Funktion nimmt ihr Maximum in μ.

2. Eine Erhöhung von μ bewirkt eine Verschiebung der Kurve nach rechts, eine Verkleinerung von μ eine Verschiebung nach links.
3. Eine Verkleinerung der Standardabweichung macht die Kurve spitzer; eine Vergrößerung

der Standardabweichung macht sie flacher.

4. Die Funktion ist symmetrisch um den Erwartungswert. Damit sind die Flächen links und rechts vom Erwartungswert jeweils gleich 0.5.

5. Die Funktion hat ihre Wendepunkte in $x = \mu \pm \sigma$.

6. Erwartungswert = Median = Modus

7. $x \to \pm\infty \quad \Rightarrow \quad f(x;\mu,\sigma) \to 0$.

<u>B. 7. 4.</u> (*Standardisierte Normalverteilung*)
Wegen

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$$

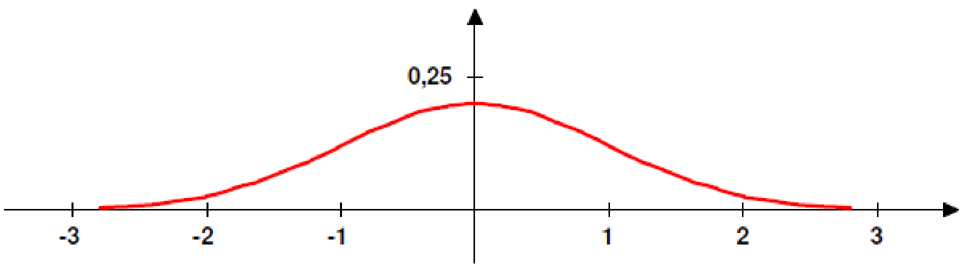
mit

$$E(Z) = 0, \qquad D^2(Z) = 1$$

(Siehe D. 6. 3) erhält man folgende Funktionen:

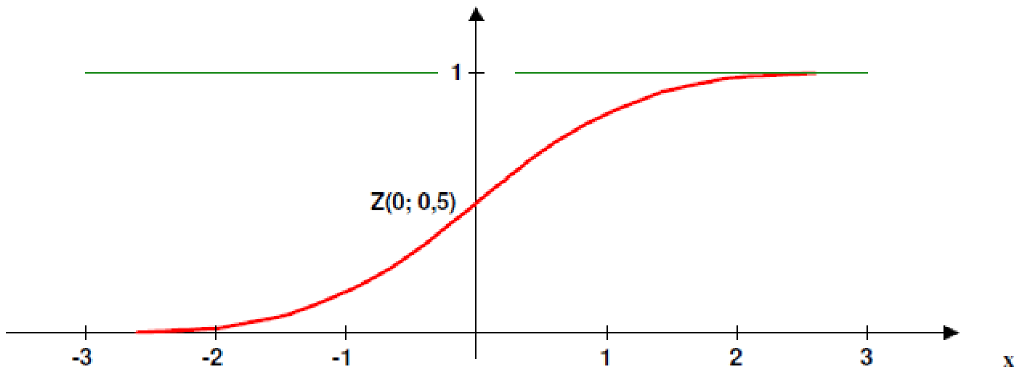
1. Die *Dichtefunktion der standardisierten Normalverteilung*:

$$f(x) = \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \qquad x \in R^1.$$



2. Die *standardisierte Verteilungsfunktion der Normalverteilung*:

$$F(x) = \Phi(x)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt, \qquad x \in R^1.$$



B. 7. 5.

$$\varphi(-x;\ 0,\ 1) = \varphi(x;\ 0,\ 1),$$

$$\Phi(-x;\ 0,\ 1) = 1 - \Phi(x;\ 0,\ 1).$$

S. 7. 3.

$$P\left(|X-\mu| < c\right) = 2 \cdot \Phi\left(\frac{c}{\sigma}\right) - 1, \quad c \in R^1.$$

BS. 7. 1.
Nach einer gängigen Definition gilt ein Haushalt als arm, wenn er über weniger als 50% des Durchschnittseinkommens verfügt. Der Haushalt soll normalverteilt sein mit einem Durchschnitt von 3000 € und einer Standardabweichung von 1600 €.

1. Wie hoch wäre dann der Anteil armer Haushalte?
2. Mit welcher Wahrscheinlichkeit weicht das Einkommen eines Haushalts um weniger 400 € vom Erwartungswert ab?
3. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein Haushalt mindestens 2500 € und weniger als 3200 €?
4. Über welches Einkommen verfügen die 5% wohlhabendsten Haushalte mindestens?

Lösung
Sei X das Einkommen eines Haushaltes. Es gilt:

$$\mu = 3000 \text{ €}, \qquad \sigma = 1600 \text{ €}.$$

1.

$$P(X < 1500) = F(1500) = \Phi\left(\frac{1500-3000}{1600}\right) = \Phi(-0.9375)$$

$$= 1 - \Phi(0.9375) = 1 - 0.82575 = 0.17425 \approx 17.425\%$$

2.

$$P\left(\left|X-3000\right|<400\right)=2\cdot\Phi\left(\frac{400}{1600}\right)-1=2\cdot\Phi(0.25)-1$$

$$=2\cdot 0.5987-1$$

$$=0.1974$$

3.

$$P\left(2500\le X<3200\right)=F\left(3200\right)-F\left(2500\right)$$

$$=\Phi\left(\frac{3200-3000}{1600}\right)-\Phi\left(\frac{2500-3000}{1600}\right)=\Phi\left(0.1250\right)-\Phi\left(-0.3125\right)$$

$$=\Phi\left(0.1250\right)-\left(1-\Phi\left(0.3125\right)\right)=0.5517-1+0.6255=0.1724\,.$$

4.

$$P(X\ge x)=0.05$$

$$1-P(X<x)=0.05$$

$$P(X<x)=0.95$$

$$F(x)=\Phi\left(\frac{x-3000}{1600}\right)=\Phi(1.6449)\,,$$

$$\frac{x-3000}{1600}=1.6449\quad\Rightarrow\quad x\ge 5631.80$$

B. 7. 6 (***Drei-Sigma-Regel***)

Aus Satz S. 8. 3.:

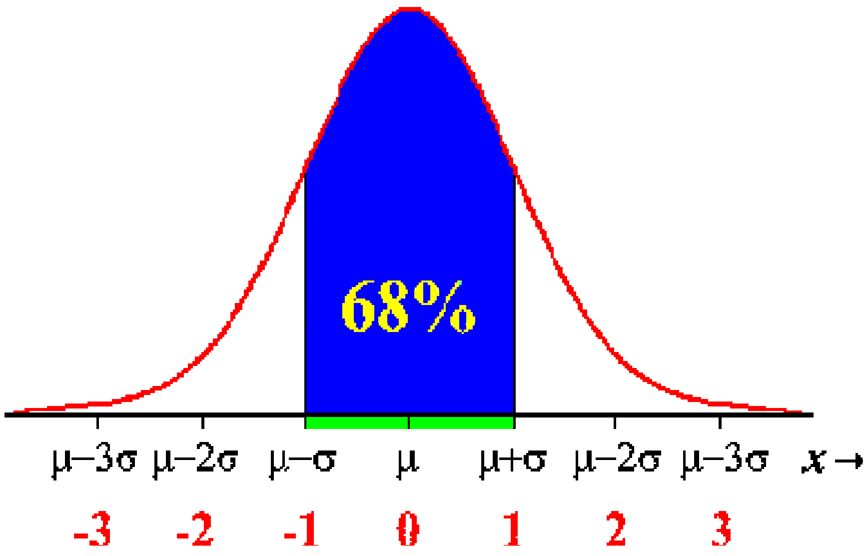
$$P\left(\left|X-\mu\right|<\sigma\right)=0.6828$$

$$P\left(\left|X-\mu\right|<2\sigma\right)=0.9544$$

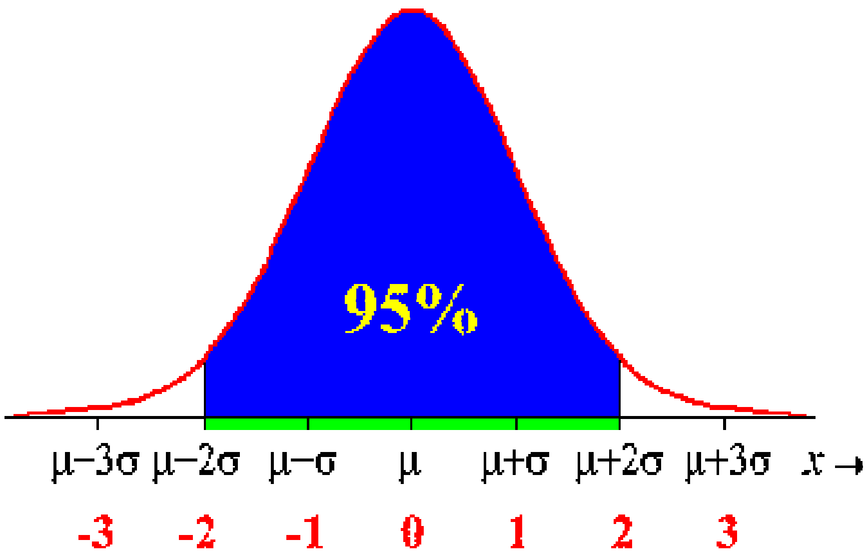
$$P\left(\left|X-\mu\right|<3\sigma\right)=0.9972\,.$$

Dies bedeutet:

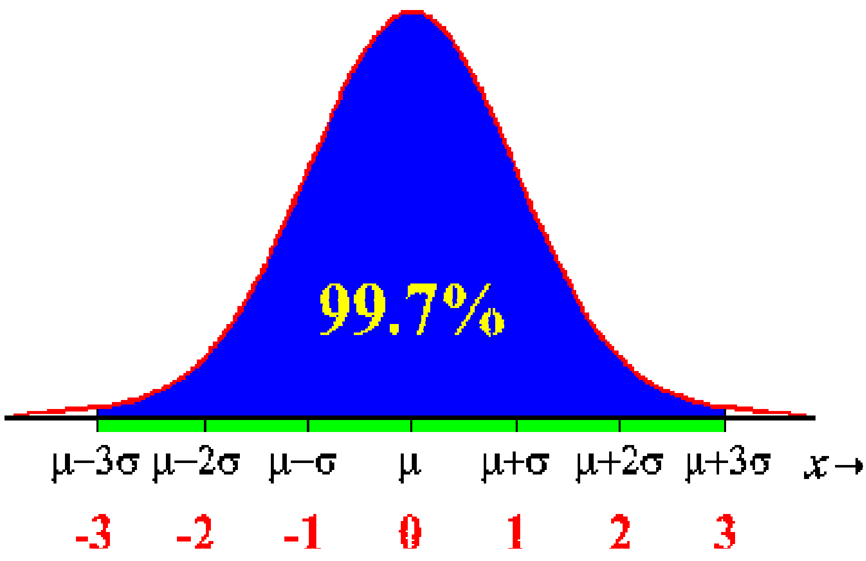
Etwa 68% aller Beobachtungswerte liegen im Intervall $\left[\mu-\sigma,\ \mu+\sigma\right]$:



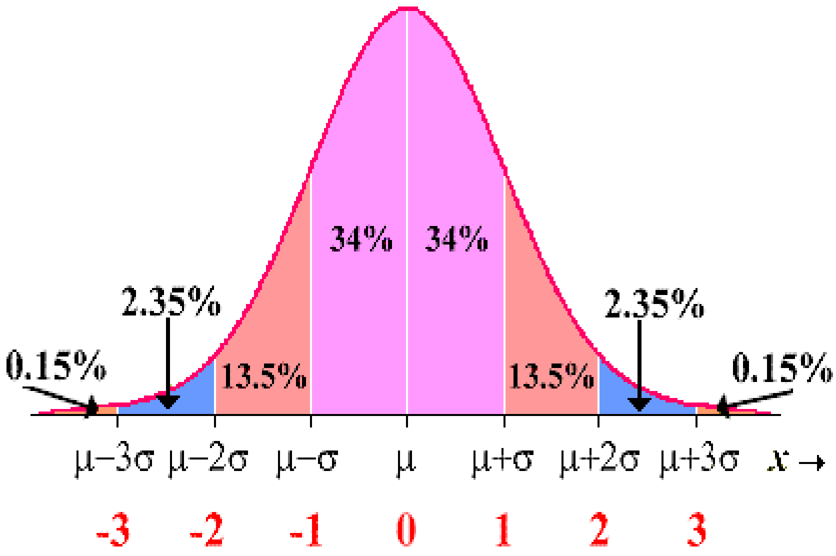
Etwa 95% aller Beobachtungswerte liegen im Intervall $[\mu - 2\sigma,\ \mu + 2\sigma]$:



Etwa 99.7% aller Beobachtungswerte liegen im Intervall $[\mu - 3\sigma,\ \mu + 3\sigma]$:



Das nachfolgende Bild zeigt ein umfassendere Darstellung:



S. 7. 4.
Seien $X_i,\ i=1,\ 2,\ldots,$ binomial verteilte Zufallsvariable mit den Parametern n und p .
Die Folge der entsprechenden standardisierten Zufallsvariablen

$$\begin{aligned} X_i &:= \frac{X_i-\mu}{\sigma} \\ &= \frac{X_i-n\cdot p}{\sqrt{n\cdot p\cdot q}}, \qquad i=1,\ 2,\ldots \end{aligned}$$

konvergiert gegen eine standardisierte normalverteilte Zufallsvariable.
Es gilt insbesondere

$$P(X_i<x)=\Phi\left(\frac{x-n\cdot p}{\sqrt{n\cdot p\cdot q}}\right).$$

<u>B. 7. 7</u> (*Approximation der Binomialverteilung durch die Normalverteilung*)
Der obige Satz kann benutzt werden, um die Binomialverteilung durch die Normaverteilung zu approximiert:
Dazu kann man folgende Faustregel verwenden:

> “Gilt
>
> $$n \cdot p > 5 \quad \text{and} \quad n \cdot q > 5,$$
>
> dann lässt sich die Binomialverteilung durch die Normalverteilung approximiert werden”

<u>BS. 7. 2.</u>
Erfahrung zeigt, dass 90% der Produkte eines Betriebes höchster Qualität sind. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens 950 Produkte dieses Betriebes in einer Stichprobe von 1000 Produkten höchster Qualität sind.

Lösung:
Sei X die Anzahl der Produkte höchster Qualität. Wir haben damit:

$$n = 1000, \qquad p = 0.9 .$$

Die Anwendung der Binomialverteilung führt zu dem “unangenehmen” Ansatz::

$$P\left(X \geq 950\right) = \sum_{x=950}^{1000} \binom{1000}{x} \cdot 0.9^{x} \bullet 0.1^{1000-x} .$$

Wir approximieren daher die Binomialverteilung durch die Normalverteilung. (Offensichtlich gilt hier die entsprechende Faustregel.):

$$E\left(X\right) = \mu = n \cdot p = 1000 \cdot 0.9 = 900$$
$$D^2\left(X\right) = \sigma^2 = n \cdot p \cdot q = 900 \cdot 0.1 = 90$$
$$P\left(X \geq 950\right) = 1 - P\left(X < 950\right) = 1 - \Phi\left(\frac{950-900}{\sqrt{90}}\right) = 1 - \Phi\left(5.3\right) = 0.0001 .$$

(*Letzte Aktualisierung: 27.05.2016*)