Kapitel VI

Einige spezielle diskrete Verteilungen

D. 6. 1. (***Hypergeometrische Verteilung***)
Eine Zufallsvariable X heißt hypergeometrisch verteilt, wenn sie folgende Wahrscheinlichkeitsfunktion besitzt:

$$P(X = x) = p_i = \frac{\binom{M}{x} \cdot \binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}},$$

$$x = 0,1,\dots,n; \quad n \le M \le N .$$

B. 6. 1.
Die Wahrscheinlichkeitsfunktion der hypergeometrischen Verteilung ist formal äquivalent der Auswahl *ohne Zurücklegen*.

B. 6. 2. (***Voraussetzungen***)

1. Die Anzahl der Versuche ist endlich.
2. Die Versuche sind unabhängig voneinander.
3. Jeder Versuch hat genau zwei Ausgänge.
4. Die Wahrscheinlichkeiten der Versuchsausgänge bleiben konstant.

S. 6. 1.
Sei X eine hypergeometrisch verteilte Zufallsvariable. Dann gilt:

$$E(X) = n \cdot \frac{M}{N}$$

$$= n \cdot p .$$

$$D^2(X) = \frac{N-n}{N-1} n \cdot \frac{M}{N} \cdot \left(1 - \frac{M}{N}\right)$$

$$= \frac{N-n}{N-1} n \cdot p \cdot q .$$

Beweis:

$$E(X) = \sum_{x=0}^{n} \frac{\binom{M}{x} \cdot \binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}} \cdot x = n \cdot \frac{M}{N} = n \cdot p ,$$

$$D^2(X) = E\left(X^2\right) - \left(E(X)\right)^2$$

$$= \sum_{x=0}^{n} \frac{\binom{M}{x} \cdot \binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}} \cdot x^2 - \left(n \cdot \frac{M}{N}\right)^2$$

$$= n \cdot \frac{M}{N} \cdot \left(1 - \frac{M}{N}\right) \cdot \frac{N-n}{N-1}$$

$$= \frac{N-n}{N-1} \cdot n \cdot p \cdot q \,.$$

<u>BS. 6. 1</u>

Eine Kiste enthält 25 Gegenstände, von denen 10 defekt sind. Es wird eine Stichprobe *ohne Zurücklegen* von 2 Gegenständen gewählt.

1. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeits- und die Verteilungsfunktion von X .

2. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass

   i) kein Gegenstand defekt ist;
   ii) höchstens ein Gegenstand defekt ist.

3. Ermitteln Sie den Erwartungswert, die Varianz und die Standardabweichung der Zufallsgröße.

Lösung:

Sei X die Anzahl der defekten Gegenstände in der Stichprobe. Wir haben

$$N = 25, \qquad M = 10, \qquad n = 2 \,.$$

1.

$$P(X = 0) = \frac{\binom{10}{0} \cdot \binom{25-10}{2-0}}{\binom{25}{2}} = \frac{7}{20} = 0.35 \cdot$$

$$P(X = 1) = \frac{\binom{10}{1} \cdot \binom{25-10}{2-1}}{\binom{25}{2}} = \frac{10}{20} = 0.50$$

$$P(X = 2) = \frac{\binom{10}{2} \cdot \binom{25-10}{2-2}}{\binom{25}{2}} = \frac{3}{20} = 0.15$$

Die Wahrscheinlichkeitsfunktion:

x_i	0	1	2
$P(X=x_i)$	0.35	0.50	0.15

Die Verteilungsfunktion

$$F(x)=\begin{cases} 0.00, & \text{falls} \quad -\infty < x \le 0 \\ 0.35, & \text{falls} \quad 0 < x \le 1 \\ 0.85, & \text{falls} \quad 1 < x \le 2 \\ 1.00, & \text{falls} \quad 2 < x < +\infty \end{cases}$$

2

i)

$$P(X=0)=0.35.$$

ii)

$$P(X<2)=F(2)=0.85.$$

3.

$$p=\frac{M}{N}=\frac{10}{25}=\frac{2}{5}, \qquad q=1-\frac{2}{5}=\frac{3}{5},$$
$$E(X)=n\cdot p=2\cdot\frac{2}{5}=0.8,$$
$$D^2(X)=\frac{N-n}{N-1}\cdot n\cdot p\cdot q=\frac{25-2}{25-1}\cdot 2\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{5}=0.46,$$
$$D(X)=0.678232998.$$

D. 6. 2. (*Binomialverteilung*)
Eine Zufallsgröße X heißt *binomialverteilt*, wenn sie folgende Wahrscheinlichkeitsfunktion besitzt:

$$P(X=x)=p_i=\binom{n}{x}\cdot p^x\cdot q^{n-x}, \quad x=0,\ 1,\dots,n.$$

B. 6. 3.
Die Wahrscheinlichkeitsfunktion der Binomialverteilung ist formal äquivalent der Auswahl *mit Zurücklegen*.

B. 6. 4. (*Voraussetzungen*)

1. Die Anzahl der Versuche ist endlich.
2. Die Versuche sind unabhängig voneinander.
3. Jeder Versuch hat genau zwei Ausgänge.
4. Die Wahrscheinlichkeiten der Versuchsausgänge bleiben konstant.

S. 6. 2
Sei X binomial verteilt. Dann gilt:

$$E(X) = n \cdot p\,,$$

$$D^2(X) = n \cdot p \cdot q\,.$$

Beweis:

$$E(X) = \sum_{x=0}^{n} x \cdot \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot (1-p)^{n-x} = n \cdot p\,,$$

$$D^2(X) = \sum_{x=0}^{n} x^2 \cdot \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot (1-p)^{n-x} - n^2 \cdot p^2 = n \cdot p \cdot (1-p) = n \cdot p \cdot q\,.$$

BS. 6. 2
Eine Kiste enthält 25 Gegenstände, von denen 10 defekt sind. Es wird eine Stichprobe *mit Zurücklegen* von 2 Gegenständen gewählt.

1. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeits- und die Verteilungsfunktion von X .

2. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass

   i) kein Gegenstand defekt ist;
   ii) höchstens ein Gegenstand defekt ist.

3. Ermitteln Sie den Erwartungswert, die Varianz und die Standardabweichung der Zufallsgröße.

Lösung:
Sei X die Anzahl der defekten Gegenstände in der Stichprobe. Wir haben

$$n = 2, \quad p = \frac{M}{N} = \frac{10}{25} = \frac{2}{5}, \quad q = \frac{3}{5}.$$

1.

$$P(X = 0) = \binom{2}{0} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^0 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^{2-0} = \frac{9}{25} = 0.36\,.$$

$$P(X = 1) = \binom{2}{1} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^1 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^{2-1} = \frac{12}{25} = 0.48$$

$$P(X=2)=\binom{2}{2}\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^2\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^{2-2}=\frac{4}{25}=0.16$$

Wahrscheinlichkeitsfunktion:

x_i	0	1	2
$P(X=x_i)$	0.36	0.48	0.16

Verteilungsfunktion:

$$F(x)=\begin{cases}0.00, & \text{falls} \quad -\infty < x \leq 0\\ 0.36, & \text{falls} \quad 0 < x \leq 1\\ 0.84, & \text{falls} \quad 1 < x \leq 2\\ 1.00, & \text{falls} \quad 2 < x < +\infty\end{cases}$$

2.

i)

$P(X=0)=0.36$.

ii)

$P(X<2)=F(2)=0.84$.

3.

$E(X)=n\cdot p=2\cdot\frac{2}{5}=0.8$,

$D^2(X)=n\cdot p\cdot q=2\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{5}=0.48$,

$D(X)=0.692820323$.

<u>S. 6. 3.</u>

$$\lim_{N\to+\infty}\frac{\binom{M}{x}\cdot\binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}}=\binom{n}{x}\cdot p^x\cdot q^{n-x}.$$

<u>B. 6. 5.</u>

Für ein "hinreichend" großes N die hypergeometrische Verteilung kann durch die Binomialverteilung approximiert werden. Dabei wird folgende <u>Faustregel</u> empfohlen:

> "Gilt $10\cdot n\leq N$, so kann die hypergeometrische Verteilung durch die Binomialverteilung approximiert werden."

BS 6. 3.
Ein Versand von 5000 Reifen enthält 1000 Reifen mit kleinen Fehlern. 10 Reifen werden ohne Zurücklegen gewählt.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in dieser Stichprobe genau drei Reifen kleine Fehler haben?

Lösung:
Wir haben:

$$N = 5000, \quad M = 1000, \quad n = 10 .$$

Damit gilt:

$$P(X = 3) = p_3 = \frac{\binom{1000}{3} \cdot \binom{5000-1000}{10-3}}{\binom{5000}{10}} = 0.201477715 \cdot$$

Wegen

$$10n = 10 \cdot 10 = 100 \le 5000 = N$$

kann aber die gesuchte Wahrscheinlichkeit auch folgendermaßen berechnet werden:

$$n = 10, \quad p = \frac{M}{N} = \frac{1000}{5000} = \frac{1}{5}, \quad q = \frac{4}{5},$$

$$P(X = 3) = p_3 = \binom{10}{3} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^3 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{10-3} = 0.201326592 .$$

B. 6. 8.

$$\lim_{N \to +\infty} \frac{N-n}{N-1} \cdot n \cdot p \cdot q = \lim_{N \to +\infty} \frac{1-\frac{n}{N}}{1-\frac{1}{N}} \cdot n \cdot p \cdot q = n \cdot p \cdot q.$$

D. 6. 3. (***Poisson-Verteilung***)
Eine diskrete Zufallsvariable X hat eine Poisson-Verteilung, wenn ihre Wahrscheinlichkeitsfunktion lautet:

$$P(X = x) = \frac{\lambda^x}{x!} \cdot e^{-\lambda},$$
$$x = 0, 1, \ldots, n .$$

S. 6. 4.
Die Zufallsgröße X möge Poissonverteilt sein. Dann gilt:

$$E(X) = D^2(X) = n \cdot p = \lambda .$$

BS. 6. 4.
In einem Quadratmeter einer bestimmten Stoffart kommen durchschnittlich 0.5 Fehler vor.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in einem Quadratmeter dieser Stoffart

- i) kein Fehler vorkommt?
- ii) Höchstens 2 Fehler vorkommen?

Lösung:
Sei

X : die Anzahl der Fehler in einem Quadratmeter des Stoffs.

Wir haben: $\lambda = 0.5$.

i)

$$P(X = 0) = \frac{0.5^0}{0!} \cdot e^{-0.5} = 0.6065306597 .$$

ii)

$$P(X = 1) = \frac{0.5}{1!} \cdot e^{-0.5} = 0.3032653299 .$$

$$P(X = 2) = \frac{0.5^2}{2!} \cdot e^{-0.5} = 0.075816332 .$$

$$P(X \leq 2) = 0.6065306597 + 0.3032653299 + 0.075816332 = 0.9856123080$$

S. 6. 5.

$$\lim_{\substack{n\to+\infty \\ n\cdot p=\lambda}} = \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot q^{n-x} = \frac{\lambda^x}{x!} \cdot e^{-\lambda} .$$

Beweis:

$$\binom{n}{x} \cdot p^x \cdot q^{n-x} = \binom{n}{x} \cdot \left(\frac{\lambda}{n}\right)^x \cdot \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-x}$$

$$= \frac{\lambda^x}{x!} \cdot \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right) \cdot \left(1-\frac{2}{n}\right) \ldots \left(1-\frac{x-1}{n}\right) \cdot \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n}{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^x} .$$

Die Behauptung des Satzes folgt direkt aus:

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n = e^{-\lambda}, \qquad \lim_{n\to+\infty} \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^x = 1 .$$

B. 6. 9.
Die Binomialverteilung kann für ein “hinreichend” großes $n\,(n \to \infty)$ und konstantes $n \cdot p = \lambda$ durch die Poisson-Verteilung approximiert werden.
Wegen

$$p = \frac{\lambda}{n}, \qquad n \to \infty \;\; \Rightarrow \;\; p \to 0$$

wird diese Verteilung auch als “Verteilung seltener“ Ereignisse bezeichnet.

Dabei wird folgende Faustregel empfohlen:

“für

$$n \cdot p \le 10 \quad \text{und} \quad n \ge 1500\,p\,,$$

kann die Binomialverteilung durch die Poisson-Verteilung approximiert werden.“

BS 6. 5.
80 Leute arbeiten in einer Fabrik. Die Wahrscheinlichkeit, dass einer im Winter krank wird sei gleich 0.05
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens 11 Leute im Winter krank werden?

Lösung:
Sei X die Anzahl der Erkrankten. Mit $n = 80$ und $p = 0.05$ und unter Anwendung der Binomialverteilung erhält man:

$$P(X \ge 11) = 1 - P(X < 11) = 1 - F(11) = 1 - \sum_{x=0}^{10} \binom{80}{x} \cdot 0.05^x \cdot (1 - 0.05)^{80-x}.$$

Nicht angenehm zu rechnen! Dies ist auch nicht notwendig, da

$$n \cdot p = 80 \cdot 0.05 = 4 < 10 \quad \text{und} \quad n = 80 \ge 1500 \cdot 0.05 = 75 = 1500 \cdot p$$

die gesuchte Wahrscheinlichkeit durch die Poison-Verteilung approximiert werden kann:

$$\lambda = n \cdot p = 80 \cdot 0.05 = 4\,,$$

$$P(X \ge 11) = 1 - P(X < 11) = 1 - F(11) = 1 - \sum_{x=0}^{10} \frac{4^x}{x!} \cdot e^{-4} = 1 - 0.997158 = 0.002842$$

(*Letzte Aktualisierung: 25.04.2014*)