Kapitel V

Parameter der Verteilungen

D. 5. 1. (***Erwartungswert***)
Als *Erwartungswert* einer Zufallsvariablen X bezeichnet man:

$$E(X) := \begin{cases} \sum_{i=1}^{\infty} x_i \cdot p_i & \text{falls } X \text{ diskret} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)dx & \text{falls } X \text{ stetig} \end{cases}$$

Dabei sei vorausgesetzt:

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i| \cdot p_i < \infty$$

und

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x| \cdot f(x)dx < \infty \, .$$

B. 5. 1.
Der Erwartungswert ist das gewogene arithmetische Mittel der Realisierungen x_i einer Zufallsvariablen X, wobei die Wahrscheinlichkeiten p_i als Gewichte wirken.

B. 5. 2.
Der Begriff "Erwartungswert" in der Wahrscheinlichkeitstheorie ist vergleichbar mit dem Bergriff "arithmetisches Mitte" in der deskriptiven Statistik.
Das nachfolgende Beispiel zeigt die Ähnlichkeiten und die Differenzen:

BS. 5. 1.
Ein Würfel wird geworfen. Das Ergebnis lautet

3, 5, 4, 3, 1.

Für das arithmetische Mittel gilt:

$$\bar{x} = \frac{1}{5} \cdot (3+5+4+3++1) = 3.2$$

Der Erwartungswert der Zufallsvariablen

X : „die Zahl, die oben erscheint."

lautet:

$$E(X) = \frac{1}{6} \cdot 1 + \frac{1}{6} \cdot 2 + \frac{1}{6} \cdot 3 + \frac{1}{6} \cdot 4 + \frac{1}{6} \cdot 5 + \frac{1}{6} \cdot 6 = 3.5$$

B. 5. 2.
Während sich das arithmetische Mittel von Versuch zu Versuch im Allgemeinen ändert, ist der Erwartungswert eine objektive Zahl, unabhängig vom Ausgang eines konkreten Versuchs. Für eine hinreichend große Anzahl von Versuchen nähert sich das arithmetische Mittel dem Erwartungswert.

BS. 5. 2.
Gegeben sei folgende Dichtefunktion einer Zufallsvariable X :

$$f(x) = -\frac{2}{9}x + \frac{2}{3}, \quad x \in [0,\ 3] \ ,$$

Berechnen Sie den Erwartungswert $E(X)$.

Lösung:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)dx = \int_0^3 x \cdot \left(-\frac{2}{9}x + \frac{2}{3} \right) dx$$

$$= \int_0^3 \left(-\frac{2}{9}x^2 + \frac{2}{3}x \right) dx$$

$$= -\frac{2}{9} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{x^2}{2} \Bigg|_0^3$$

$$= -\frac{2}{9} \cdot \frac{27}{3} + \frac{9}{3} = 1$$

D. 5. 2. (***Varianz bzw. Dispersion, Standardabweichung***)
Die *Varianz* bzw. *Dispersion* einer Zufallsvariablen X , bezeichnet mit $D^2(X)$, wird folgendermaßen definiert:

$$D^2(X) := E(X - E(X))^2$$

d.h.

$$D^2(X) := \begin{cases} \sum_{i=1}^{\infty} (x_i - E(X))^2 \cdot p_i & \text{falls } X: \text{ discrete} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E(X))^2 \cdot f(x)dx & \text{falls } X: \text{ stetig} \end{cases}$$

Dabei wird vorausgesetzt, dass der Erwartungswert existiert.

Die *Standardabweichung,* bezeichnet mit D , wird folgendermaßen definiert:

$$D(X) := \sqrt{D^2(X)} \quad (>0).$$

B. 5. 3.
Es kann leicht gezeigt werden, dass

$$D^2\left(X\right) = E(X^2) - (E(X))^2,$$

d.h.

$$D^2(X) := \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i^2 \cdot p_i - \left(\sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i \cdot p_i\right)^2, & \text{falls } X \text{ diskret} \\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f(x)dx - \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)\right),^2 & \text{falls } X \text{ stetig} \end{cases}$$

BS. 5. 1. (*Fortsetzung*)
Bestimmen Sie die Varianz und Standardabweichung der Zufallsgröße X .

Lösung:

$$D^2(X) = \left(1-3.5\right)^2 \cdot \frac{1}{6} + \left(2-3.5\right)^2 \cdot \frac{1}{6} + ... + \left(6-3.5\right)^2 \cdot \frac{1}{6} \approx 2.92,$$

oder

$$D^2(X) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + ... + 36 \cdot \frac{1}{6} - 3.5^2 \approx 2.92 .$$

$$D(X) \approx 1.71 .$$

BS. 5. 3. (*Fortsetzung*)
Bestimmen Sie die Varianz und Standardabweichung der Zufallsgröße X .

Lösung:

$$D^2(X) = \int\limits_0^3 \left(x-1\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{9}x + \frac{2}{3}\right)dx$$

$$= \int\limits_0^3 \left(-\frac{2}{9}x^3 + \frac{10}{9}x^2 - \frac{14}{9}x + \frac{2}{3}\right)dx$$

$$= -\frac{2}{9} \cdot \frac{x^4}{4} + \frac{10}{9} \cdot \frac{x^3}{3} - \frac{14}{9} \cdot \frac{x^2}{2} + \frac{2}{3}x \Bigg|_0^3$$

$$= \frac{1}{2}$$

oder

$$D^2(X) = \int\limits_0^3 x^2 \cdot \left(-\frac{2}{9}x + \frac{2}{3}\right)dx - 1$$

$$= \int_0^3 \left(-\frac{2}{9}x^3 + \frac{2}{3}x^2 \right) dx - 1$$

$$= -\frac{2}{9} \cdot \frac{x^4}{4} + \frac{2}{3} \cdot \frac{x^3}{3} \Bigg|_0^3 - 1$$

$$= \frac{1}{2}.$$

B. 5. 4.
Seien X und Y zwei Zufallsvariable. Mit der Transformation

$$Y = g(X),$$

möchten wir unter Kenntnis der Verteilung von X Informationen über Y erhalten. Dazu betrachten wir folgendes Beispiel:

BS. 5. 4.
Sei

$$Y = 4X$$

mit folgender Wahrscheinlichkeitsfunktion

x_i	2	4
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$

und der Verteilungsfunktion

$$F(x) := \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x \leq 2 \\ \frac{1}{4} & \text{für} \quad 2 < x \leq 4 \\ 1 & \text{für} \quad x > 4 \end{cases} \cdot$$

Wir möchten aufgrund dieser Informationen die Wahrscheinlichkeitsfunktion und die Verteilungsfunktion von Y herleiten.

$$P(X = x_i) = P(4X = 4x_i)$$

$$= P(Z = 4x_i)$$

$$= P(Z = z_i), \quad i = 1,\ 2\,,$$

and

$$F(z) = P(Z < z)$$

$$= P(4X < z)$$

$$= P\left(X < \frac{z}{4}\right)$$

$$= P\left(\frac{z}{4}\right) = F(x).$$

Damit haben wir die Wahrscheinlichkeitsfunktion:

z_i	8	16
$P(Z = z_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$

und die Verteilungsfunktion:

$$F(z) := \begin{cases} 0 & \text{when} \quad z \leq 8 \\ \frac{1}{4} & \text{when} \quad 8 < z \leq 16 \\ 1 & \text{when} \quad z > 16 \end{cases}.$$

Berechnen wir nun den Erwartungswert von Z :

$$\begin{aligned} E(Z) &= z_1 \cdot P(Z = z_1) + z_2 \cdot P(Z = z_2) \\ &= 8 \cdot P(Z = 8) + 16 \cdot P(Z = 16) \\ &= 8 \cdot P(4X = 8) + 16 \cdot P(4X = 16) \\ &= 8 \cdot P(X = 2) + 16 \cdot P(X = 4) \\ &= 8 \cdot \frac{1}{4} + 16 \cdot \frac{3}{4} \\ &= 14\,. \end{aligned}$$

B. 5. 5.
Eine Verallgemeinerung des letzten Beispiels führt zu

$$E(Z) = E\left(g(x)\right) = \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{\infty} g(x_i) \cdot P(X = x_i), & \text{falls } X \text{ diskret} \\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(x) \cdot f(x)dx, & \text{falls } X \text{ stetig} \end{cases}$$

BS. 5. 5.
Betrachtet sei eine Zufallsvariable X mit der Wahrscheinlichkeitsfunktion

x_i	x_1	x_2	$\dots$	x_n
$p_i = P(X = x_i) = f(x_i)$	p_1	p_2	$\dots$	p_n

Sei

$$Y = aX + b, \quad a, b = const.$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} E(Z) &= \sum_{i=1}^{\infty} (ax_i + b) \cdot p_i \\ &= a \cdot \sum_{i=1}^{\infty} x_i \cdot p_i + b \cdot \sum_{i=1}^{\infty} p_i \\ &= a \cdot \sum_{i=1}^{\infty} x_i \cdot p_i + b\,. \end{aligned}$$

Die Existenz von $E(X)$ vorausgesetzt, hat man

$$E(aX + b) = a \cdot E(X) + b\,.$$

Es kann analog bewiesen werden:

$$D^2(aX + b) = a^2 \cdot D^2(X),$$

falls $D^2(X)$ existiert.

BS. 5. 6
Betrachtet sei die Zufallsvariable X mit

$$E(X) = \mu, \qquad D^2(X) = \sigma^2 \quad (\sigma^2 \neq 0)\,.$$

Für die Funktion

$$Y = g(X) := \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{1}{\sigma} \cdot X - \frac{\mu}{\sigma}$$

erhalten wir:

$$E(Z) = \frac{1}{\sigma} \cdot E(X) - \frac{\mu}{\sigma}$$

$$= \frac{1}{\sigma} \cdot \mu - \frac{\mu}{\sigma} = 0$$

$$= 0,$$

$$D^2(Z) = \frac{1}{\sigma^2} \cdot D^2(X)$$

$$= \frac{\sigma^2(X)}{\sigma^2(X)}$$

$$= 1.$$

<u>D. 5. 3.</u> (*Standardisierung, Standardisierte Zufallsvariable*)
Eine Zufallsvariable Z heißt *standardisierte* oder *normiert*, wenn

$$E(Z) = 0, \qquad D^2(Z) = 1.$$

Der Prozess

$$Y = g(X) := \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{1}{\sigma} \cdot X - \frac{\mu}{\sigma}$$

heißt *Standardisierung* oder *Normierung*.

(Letzte Aktualisierung: 17.05.2017)