Kapitel IV

Verteilungs-, Wahrscheinlichkeits- und Dichtefunktion

<u>D. 4. 1.</u> (*Zufallsvariable*)
Eine *Zufallsvariable* ist eine auf der Menge S definierte Funktion:

$$X = X(E), \quad E \in S,$$

Dabei ist S der Stichprobenraum.

<u>BS. 4. 1.</u> (*Siehe BS. 3.9.*)
Eine Kiste enthält 25 Gegenstände, von denen 10 defekt sind. Es wird eine Stichprobe von 2 Gegenständen *ohne Zurücklegen* genommen.

Sei

X : „Die Anzahl der defekten Gegenstände in der Stichprobe."

E_1: „Beide Gegenstände sind gut." $\Rightarrow$ $X = 0$

E_2: „Genau ein Gegenstand ist defekt." $\Rightarrow$ $X = 1$

E_3: „Beide Gegenstände sind defekt." $\Rightarrow$ $X = 2$

<u>BS. 4. 2.</u>
Sei

X : „Die Temperatur am 01.01. um null Uhr"
E : $[0, \quad 24]$: Zeit

<u>D. 4. 2.</u> (*Diskrete und stetige Zufallsvariable*)

1. Eine Zufallsvariable ist *diskret*, wenn sie endlich bzw. abzählbar unendlich viele Werte annehmen kann. (Siehe BS: 4. 1.)
2. Eine Zufallsvariable ist *stetig*, wenn sie jede reelle Zahl aus einem bestimmten Intervall annehmen kann. (Siehe BS. 4. 2.)

<u>BS. 4. 3.</u>
1. Beispiele für eine *diskrete* Zufallsvariable:

- Anzahl der Kunden einer Bank in einer Stunde.
- Anzahl der Kredit gewähr durch ein Kreditinstitut an einem Tag.

2. Beispiele für eine *steige* Zufallsvariable:

- Die Fahrzeit eines Mitarbeiters zur Arbeit.
- Die Länge eines Telefonanrufs.

D. 4. 3. (***Verteilungsfunktion***)
Unter einer *Verteilungsfunktion* verstehen wir:

$$F(X) = P(X < x), \quad x \in R^1$$

BS. 4. 1. (*Fortsetzung*)
Wir hatten

$$P(X = 0) = \frac{7}{20},$$
$$P(X = 1) = \frac{10}{20},$$
$$P(X = 2) = \frac{3}{20}.$$

Damit haben wir

$$F(0) = P(X < 0) = 0,$$
$$F(1) = P(X < 1) = P(X = 0) = \frac{7}{20},$$
$$F(2) = P(X < 2) = P(X = 0) + P(X = 1) = \frac{7}{20} + \frac{10}{20} = \frac{17}{20},$$
$$F(3) = P(X < 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = \frac{7}{20} + \frac{10}{20}\frac{3}{23} = 1.$$

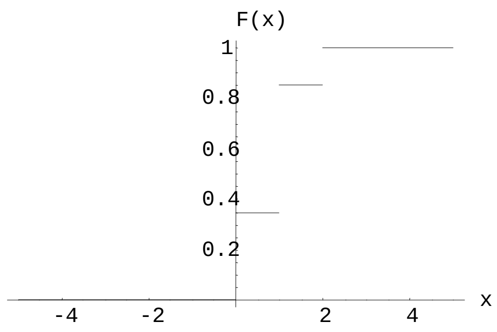
Analytische Form der Verteilungsfunktion:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{when} \quad -\infty < x \le 0 \\ \frac{7}{20} & \text{when} \quad 0 < x \le 1 \\ \frac{17}{20} & \text{when} \quad 1 < x \le 2 \\ 1 & \text{when} \quad 2 < x < +\infty \end{cases}$$

Tabellarische Form der Verteilungsfunktion:

x	$F(x)$
$]-\infty, \quad 0]$	0
$]0, \quad 1]$	$\frac{7}{20}$
$]1, \quad 2]$	$\frac{17}{20}$
$]2, \quad +\infty[$	1

Grafische Form der Verteilungsfunktion:



<u>S. 4. 1.</u> (*Einige Eigenschaften der Verteilungsfunktion*)

1.

$$0 \leq F(x) \leq 1, \quad \forall x \in R^1 .$$

2.

$$\forall x_1, x_2 : x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad F(x_1) \leq F(x_2) .$$

3.

$$\forall x_1, x_2 : x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad P(x_1 \leq X < x_2) = F(x_2) - F(x_1) .$$

4.

$$x \to -\infty \quad \Rightarrow \quad F(x) \to 0$$

$$x \to +\infty \quad \Rightarrow \quad F(x) \to 1 .$$

5.

$F(x)$ ist mindestens linksseitig stetig und hat eine endliche Anzahl von Sprungstellen.

<u>BS. 4. 4.</u>

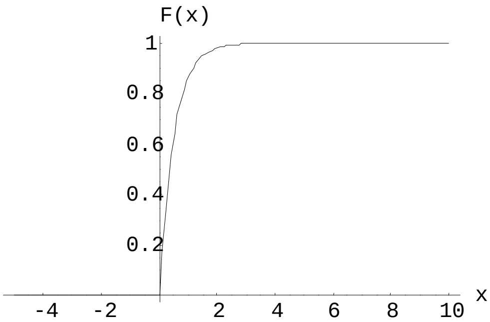
Sei X die Zeit in Stunden, die zwischen der Ankunft zweier Schiffe in einem Hafen vergeht (die sog. „Zwischenankunftszeit“):

$$F(x) := \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x \leq 0 \\ 1 - e^{-2x} & \text{für} \quad x > 0 \end{cases} .$$

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Zwischenankunftszeit

1. weniger als 90 Minuten beträgt,
2. mindestens 15 Minuten ist.
3. mindestens 6 Minuten und weniger als 30 Minuten ist.

Lösung:



1.

$$P\left(X < \frac{3}{2}\right) = F\left(\frac{3}{2}\right) = 1 - e^{-3} = 0.9502$$

2.

$$P\left(X \geq \frac{1}{4}\right) = 1 - P\left(X < \frac{1}{4}\right) = 1 - F\left(\frac{1}{4}\right) = 1 - 1 + e^{-0.5} = 0.6065$$

3.

$$P\left(\frac{1}{10} \leq X < \frac{1}{2}\right) = F\left(\frac{1}{2}\right) - F\left(\frac{1}{10}\right) = e^{-0.2} - e^{-1} = 0.8187 - 0.3679 = 0.4508$$

<u>D. 4. 4.</u> (*Wahrscheinlichkeitsfunktion*)
Sei X eine diskrete Zufallsvariable. Dann heißt die Funktion

$$p(x) = P(X = x)$$

die *Wahrscheinlichkeitsfunktion* der diskreten Zufallsgröße X .
Sei x_i, $i = 1, 2, ..., n$, die $i-$te Realisierung von X . Dann lässt sich die Wahrscheinlichkeitsfunktion folgendermaßen darstellen:

x_i	x_1	x_2	$\ldots$	x_n
$p_i = P(X = x_i) = f(x_i)$	p_1	p_2	$\ldots$	p_n

<u>BS. 4. 1.</u> (*Fortsetzung*)

x_i	0	1	2
$p_i = P(X = x_i)$	$\frac{7}{20}$	$\frac{10}{20}$	$\frac{3}{20}$

S. 4. 2.

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i) = \sum_{i=1}^{n} p_i = 1 \,.$$

S. 4. 3.

$$F(x) = P(X < x) = \begin{cases} 0 & \text{for} \quad x \leq x_1 \\ \sum_{i=1}^{k} p_i & \text{for} \quad x_k < x \leq x_{k+1}, \quad k = 1,\ 2,\ \ldots, n-1 \\ 1 & \text{for} \quad x > x_n \end{cases}$$

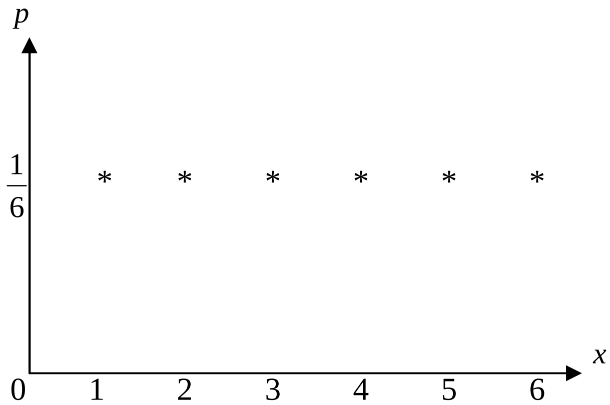
BS. 4. 5.
Ein Würfel wird geworfen. Sei

X :   „die Zahl, die oben liegt".

Wahrscheinlichkeitsfunktion
1) tabellarisch:

x_i	1	2	3	4	5	6
p_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

2)graphisch:



Verteilungsfunktion

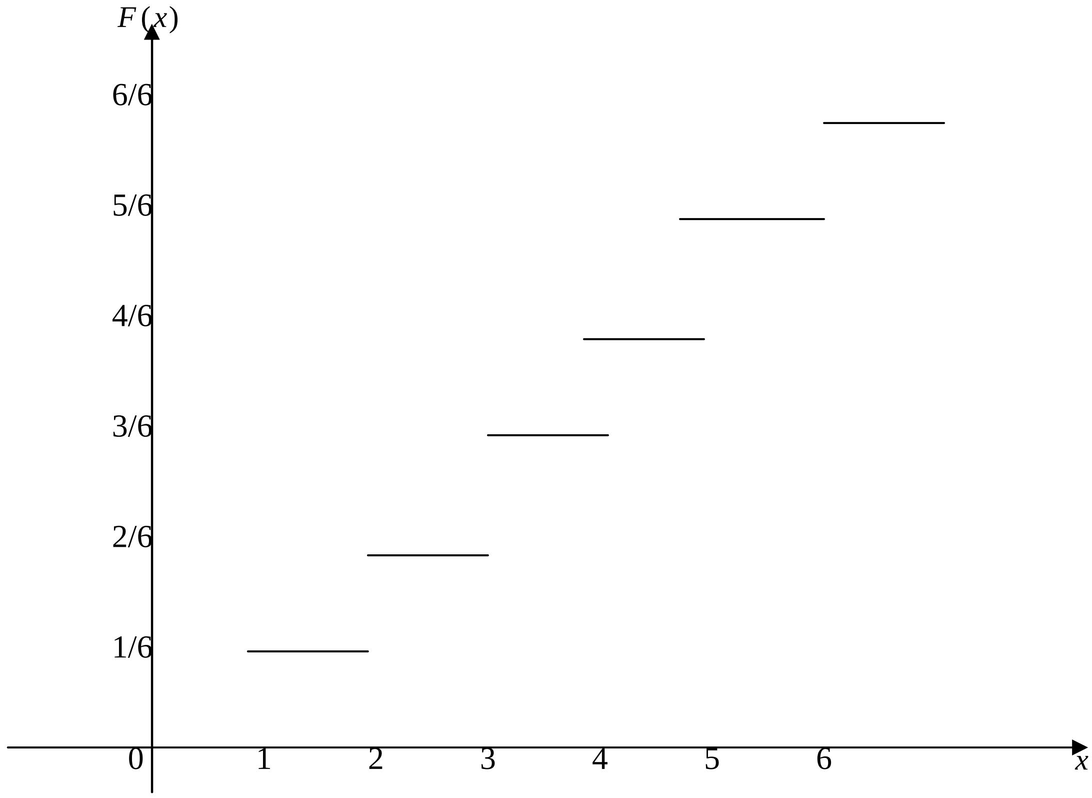
1) Analytisch:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{when} \quad -\infty < x \le 1 \\ \frac{1}{6} & \text{when} \quad 1 < x \le 2 \\ \frac{2}{6} & \text{when} \quad 2 < x \le 3 \\ \frac{3}{6} & \text{when} \quad 3 < x \le 4 \\ \frac{4}{6} & \text{when} \quad 4 < x \le 5 \\ \frac{5}{6} & \text{when} \quad 5 < x \le 6 \\ 1 & \text{when} \quad 6 < x < +\infty \end{cases}$$

2) Tabellarisch:

x	$F(x)$
$]-\infty,\ 1]$	0
$]1,\ 2]$	$\frac{1}{6}$
$]2,\ 3]$	$\frac{2}{6}$
$]3,\ 4]$	$\frac{3}{6}$
$]4,\ 5]$	$\frac{4}{6}$
$]5,\ 6]$	$\frac{5}{6}$
$]6,\ +\infty[$	$\frac{6}{6} = 1$

3) Graphisch:



D. 4. 5. (***Dichtefunktion***)
Sei $F(x)$ eine differenzierbare Verteilungsfunktion einer stetigen Zufallsvariablen X . Die Funktion

$$f(x) := F'(x)$$

heißt die *Dichtefunktion* von X .

S. 4. 4. (***Wichtige Eigenschaften einer Dichtefunktion***)

1.
$$F(x) = P(X < x)$$
$$= P(-\infty < X < x)$$
$$= \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \, .$$

2.

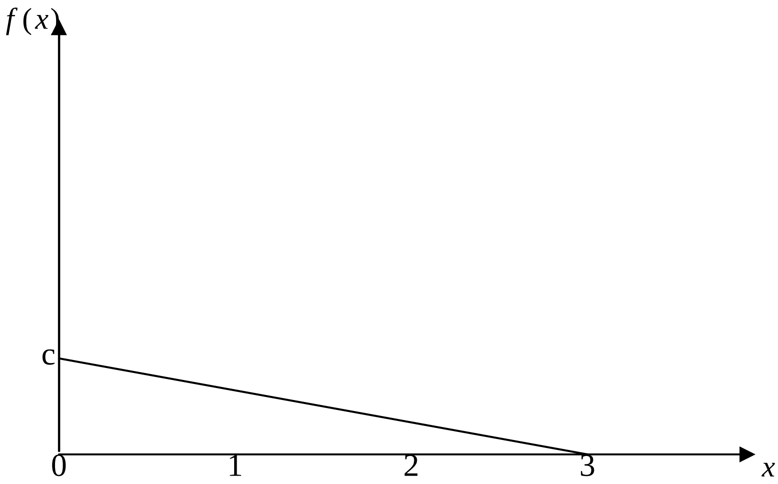
$$P(a \leq X < b) = F(b) - F(a)$$

$$= \int_{a}^{b} f(x)dx \, .$$

3.

$$P(-\infty < X < +\infty) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1\,.$$

<u>BS. 4. 6.</u>
Die nachfolgende Grafik stellet die Dichtefunktion einer Zufallsvariable X dar:



1. Berechnen Sie $f(0) = c$.
2. Geben Sie eine analytische Form für $f(x)$.
3. Stellen Sie die Verteilungsfunktion $F(x)$ auf.
4. Berechnen Sie $P(1.5 < X < 3)$.
5. Interpretieren Sie Ihre Ergebnisse geometrisch.

Lösung:

$$y = ax + b$$
$$x = 0 \quad \Rightarrow \quad y = b = c$$
$$y = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{\mathrm{b}}{\mathrm{a}} = -\frac{c}{a} = 3$$
$$a = -\frac{c}{3}\,.$$

1.

$$y = f(x) = -\frac{c}{3}x + c$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{0}^{3} f(x)dx = 1$$

$$\int_{0}^{3}\left(-\frac{c}{3}x + c\right)dx = \left[-\frac{c}{3}\cdot\frac{x^2}{2} + cx\right]_0^3$$
$$= -c \div \frac{9}{6} + 3c = -c\cdot\left(\frac{3}{2} - 3\right) = 1$$

$$c = \frac{2}{3}\,.$$

2.

$$f(x) = -\frac{\frac{2}{3}}{3} \cdot x + \frac{2}{3}$$

$$f(x) = -\frac{2}{9} \cdot x + \frac{2}{3}, \qquad x \in [0, \quad 3].$$

3.

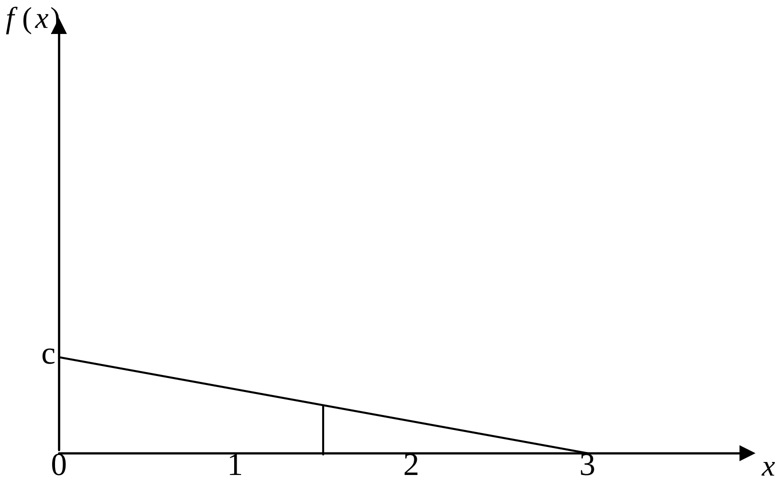
$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{0}^{3} \left(-\frac{2}{9}t + \frac{2}{3} \right) dt = \left[-\frac{2}{9} \cdot \frac{t^2}{2} + \frac{2}{3}t \right]_0^x$$

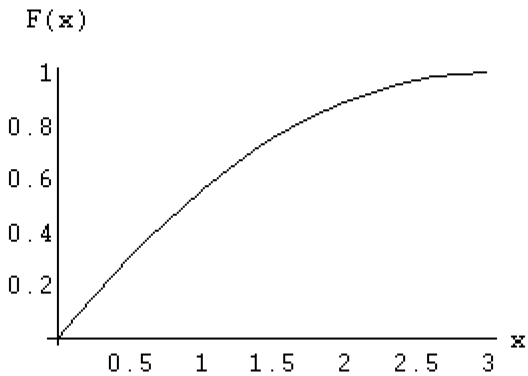
$$F(x) = -\frac{x^2}{9} + \frac{2}{3}x, \quad x \in [0, \ 3].$$

4.

$$P(1.5 < X < 3)) \approx P(1.5 \le X < 3) = \int_{1.5}^{3} f(x)dx = F(3) - F(1.5) = \frac{1}{4}$$

5.





(*Letzte Aktualisierung: 22.04.2014*)