Kapitel III

Rechnen mit Wahrscheinlichkeiten

<u>S. 3. 1.</u> (*Additionssatz*)
Seien A und B zwei *beliebige* Ereignisse. Dann gilt

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

<u>BS. 3. 1.</u>
Die nachfolgende Tabelle zeigt den Anteil der Studenten, die an einer Universität aktiv Fußball bzw. Basketball spielen:

Fußball (A):	60%
Basketball (B):	50%
Sowohl Fußball als auch Basketball:	30%

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewählter Student

1. Fußball oder Basketball spielt?
2. weder Fußball noch Basketball spielt??

Lösung:

1.
$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= 0.60 + 0.50 - 0.30 \\ &= 0.80 \end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned} 1 - P(A \cup B) &= 1 - 0.80 \\ &= 0.20 \end{aligned}$$

<u>B. 3. 1.</u>
Axiom III der axiomatischen Definition der Wahrscheinlichkeit ist ein Spezialfall des Additionssatzes für zwei unverträgliche Ereignisse.

<u>D. 3. 1.</u> (*Bedingte Wahrscheinlichkeit*)
Sei $A, B \in S$. Die Wahrscheinlichkeit, dass das Ereignis A eintritt unter der Bedingung, dass das Ereignis B eingetreten ist, wird folgendermaßen definiert:

$$P(A / B) := \begin{cases} \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}, & \text{falls} \quad P(B) > 0 \\ 0, & \text{falls} \quad P(B) = 0 \end{cases}$$

BS. 3. 2.
Eine Gruppe hat zwei Klausuren in Mathe geschrieben. 25% der Studierenden haben die erste und die 2. Klausur und 42% die erste Klausur bestanden.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Studierender, der die erste Klausur bestanden hat, auch die zweite Klausur erfolgreich abgeschlossen hat?

Lösung:
Sei

B : „Ein Studierender hat die erste Klausur bestanden. "

A : „Ein Studierender hat die zweite Klausur bestanden. "

Wir haben:

$$P(B) = 0.42\,, \qquad P(A \cap B) = 0.25\,.$$

Damit gilt:

$$P(A/B) = \frac{0.25}{0.42} \approx 0.60$$

B. 3. 2.
Ähnlich definieren wir die Wahrscheinlichkeit, dass das Ereignis B eintritt unter der Bedingung, dass ein Ereignis A bereits eingetreten ist:

$$P(B/A) := \begin{cases} \dfrac{P(B \cap A)}{P(A)}, & \text{falls} \quad P(A) > 0 \\ 0, & \text{falls} \quad P(A) = 0 \end{cases}$$

B. 3. 3.
Wegen $P(A \cap B) = P(B \cap A)$, erhält man:

$$P(A) \cdot P(A/B) = P(B) \cdot P(B/A)\,.$$

S. 3. 2. (***Produktregel für zwei beliebige Ereignisse***)
Seien $A, B \in S$ zwei *beliebige* Ereignisse. Dann gilt:

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A/B)$$

$$= P(A) \cdot P(B/A)$$

BS. 3. 3.
Drei defekte und sechs gute Glühbirnen sind aus Versehen durcheinander gekommen. Zwei werden zufällig gewählt.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass beide gut sind?

Lösung:

$A:$ „Die zweite Glühbirne ist gut. “

$B:$ „Die erste Glühbirne ist gut. “

$$P(A \cap B) = \frac{6}{9} \cdot \frac{5}{8} \approx 0.42$$

B. 3. 4.
Der Multiplikationssatz kann n *beliebige* Ereignisse E_i, $i = 1, 2, ..., n$, erweitert werden:

$$P(\bigcap_{i=1}^{n} E_i) = P(E_1) \cdot P(E_2 / E_1) \cdot P(E_3 / E_1 \cap E_2) ... P(E_n / \bigcap_{i=1}^{n-1} E_i).$$

D. 3. 2. (*Unabhängige Ereignisse*)
Das Ereignis A heißt u*nabhängig* von B, wenn

$$P(A) = P(A / B).$$

Gilt; andernfalls heißt es *abhängig von* B.

S. 3. 3.

$$\langle A \text{ is unabhängig von } B \rangle \quad \Rightarrow \langle B \text{ ist unabhängig von } A \rangle.$$

Beweis:

$$\begin{aligned} P(B / A) &= \frac{P(A / B) \cdot P(B)}{P(A)} \\ &= \frac{P(A) \cdot P(B)}{P(A)} \\ &= P(B) \end{aligned}$$

B. 3. 4.
Auf Grund des Satzes S. 3. 5. kann man von zwei *unabhängigen Ereignissen* sprechen.

BS. 3. 4.
Aus einem Skatblatt (32 Karten) wird eine Karte gezogen. Sei

$A:$ „Die Karte ist ein Ass.“

$B:$ „Die Karte ist eine Karo.“

$C:$ „Die Karte ist ein Karo-Ass.“

Sind folgende Ereignispaare unabhängig:

1. (A, B)
2. (C, A)

Lösung

1.

$$P(A) = \frac{1}{8} = P(A/B)$$

Damit sind die Ereignisse A, B unabhängig.

2.

$$P(C) = \frac{1}{32} \neq \frac{1}{4} P(C/A)$$

Damit sind die Ereignisse A, C abhängig.

<u>**S. 3. 4.**</u> **(*Multiplikationsregel für zwei unabhängige Ereignisse*)**
Seien $A, B \in S$ zwei *unabhängige* Ereignisse. Dann gilt:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Beweis:

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(B) \cdot P(A/B) \\ &= P(A) \cdot P(B) \end{aligned}$$

<u>**B. 3. 5.**</u>
Der Begriff Unabhängigkeit lässt sich auch auf $n > 2$ Ereignisse verallgemeinern.

<u>**S. 3. 5.**</u> **(*Multiplikationsregel für unabhängige Ereignisse*)**
Seien E_i, $i = 1, 2, ..., n$, *unabhängige* Ereignisse. Dann gilt:

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} E_i\right) = \prod_{i=1}^{n} P(E_i) .$$

<u>**BS. 3. 5.**</u>
Betrachtet seien die Maschinen M_i, $i = 1, 2, 3,$ mit den Zuverlässigkeiten:

M_1: 0.9, M_2: 0.8, M_3: 0.85.

Unter der Annahme, dass die drei Maschinen unabhängig voneinander arbeiten, berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass

1. keine Maschine ausfällt.

2. alle Maschinen ausfallen.

Lösung
Sei

E_i :   „Maschine M_i fällt <u>nicht</u> aus.”, $i = 1, 2, 3$.

1.
$$P(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = P(E_1) \cdot P(E_2) \cdot P(E_3)$$
$$= 0.9 \cdot 0.8 \cdot 0.85 = 0.612$$

2.
$$P(\bar{E}_1 \cap \bar{E}_2 \cap \bar{E}_3) = P(\bar{E}_1) \cdot P(\bar{E}_2) \cdot P(\bar{E}_3)$$
$$= (1-0.9) \cdot (1-0.8) \cdot (1-0.85) = 0.003$$

<u>S. 3. 6.</u>
Seien E_i, $i = 1, 2, ..., n$, *unabhängige* Ereignisse. Dann gilt:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = 1 - \prod_{i=1}^{n}\left(1 - P(E_i)\right)$$

<u>BS. 3. 5.</u> (*Fortsetzung*)

3. mindestens eine Maschine nicht ausfällt.
4. mindestens eine Maschine fällt aus.

Lösung:

3. $P(E_1 \cup E_2 \cup E_3) = 1 - (1 - P(E_1)) \cdot (1 - P(E_2)) \cdot (1 - P(E_3))$
$$= 1 - (1-0.9) \cdot (1-0.8) \cdot (1-0.85)$$
$$= 1 - 0.003 = 0.997$$
4. $P(\bar{E}_1 \cup \bar{E}_2 \cup \bar{E}_3) = 1 - (1 - P(\bar{E}_1)) \cdot (1 - P(\bar{E}_2)) \cdot (1 - P(\bar{E}_3))$
$$= 1 - (1-0.1) \cdot (1-0.2) \cdot (1-0.15)$$
$$= 1 - 0.612 = 0.388$$

<u>BS. 3. 6.</u>
Die Wahrscheinlichkeit, ein Flugzeug mit einem Schuss zu treffen ist gleich 0.004. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, ein Flugzeug mit 250 Schüssen zu vernichten? Es sei vorausgesetzt, dass ein Flugzeug vernicht wird, falls es mindestens einmal getroffen wird.

Lösung:
Sei

E_i, $i = 1, 2, ..., 250$: “das Flugzeug, mit dem $i-$ten Schuss zu treffen“.

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{250} E_i\right) = 1 - \prod_{i=1}^{250} (1 - P(E_i))$$
$$= 1 - (1 - 0.004)^{250}$$
$$= 1 - 0.367142 = 0.632858$$

<u>S. 3. 7.</u> (*Totale Wahrscheinlichkeit*)

Die Ereignisse B_i, $i = 1, 2, ..., n$, mögen eine vollständige Gruppe bilden. Für ein beliebiges Ereignis A gilt dann:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A/B_i) \cdot P(B_i).$$

Beweis:

$$A = \Omega \cap A$$
$$= \left(\bigcup_{i=}^{n} B_i\right) \cap A$$
$$= \bigcup_{i=1}^{n} (B_i \cap A)$$

$$P(A) = P\left(\bigcup_{i=1}^{n} (B_i \cap A)\right)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} P(B_i \cap A)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} P(A/B_i) \cdot P(B_i).$$

<u>BS. 3. 7.</u>

Gegeben seien drei voneinander unterscheinbare Gruppen von Urnen.
Die erste Gruppe besteht aus 3 Urnen. Jede Urne dieser Gruppe enthält 2 weiße und 3 rote Kugeln. Die zweite Gruppe besteht aus 2 Urnen. Jede Urne dieser Gruppe enthält 4 weiße und 1 rote Kugeln. Die dritte Gruppe besteht aus einer Urne. Diese enthält 0 weiße und 8 rote Kugel.

1. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, eine weiße Kugel zu wählen?
2. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, eine rote Kugel zu wählen?

Lösung:
Seien

A: „eine weiße Kugel wählen”,

B_i, $i = 1, 2, 3$: „die gewählte Urne gehört zur Gruppe i“.

1.

$$P(A)=\sum_{i=1}^{3}P(A/B_i)\cdot P(B_i)$$
$$=\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{5}+\frac{2}{6}\cdot\frac{4}{5}+\frac{1}{6}\cdot 0=\frac{7}{15}$$

2.

$$P(\bar{A})=\sum_{i=1}^{3}P(\bar{A}/B_i)\cdot P(B_i)$$
$$=\frac{3}{6}\cdot\frac{3}{5}+\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\cdot 1=\frac{8}{15}$$

<u>S. 3. 8.</u> (*Bayes*)

Die Ereignisse B_i, $i=1,2,...,n$, mögen eine vollständige Gruppe bilden. Für ein beliebiges Ereignis $A\neq\emptyset$ gilt:

$$P(B_i/A)=\frac{P(A/B_i)\cdot P(B_i)}{\sum_{i=1}^{n}P(A/B_i)\cdot P(B_i)},\qquad i=1,2,...,n\,.$$

Beweis:

$$P(B_i\cap A)=P(A)\cdot P(B_i/A)=P(B_i)\cdot P(A/B_i)$$

$$P(B_i/A)=\frac{P(B_i)\cdot P(A/B_i)}{P(A)}$$
$$=\frac{P(A/B_i)\cdot P(B_i)}{\sum_{i=1}^{n}P(A/B_i)\cdot P(B_i)},\qquad i=1,2,...,n\,.$$

<u>BS. 3. 8.</u>

Eine Fabrik produziert ein Produkt auf drei Maschinen. Die erste Maschine produziert 25%, die zweite 35% und die dritte 40% der Gesamtproduktion. Erfahrung zeigt, dass 5% der auf der ersten Maschine hergestellten Produkte Ausschuss sind. Die Ausschussquote der zweiten bzw. der dritten Maschine beträgt 4% bzw. 2%.

Ein Produkt wird zufällig gewählt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Ausschussprodukt auf der

1. ersten
2. zweiten
3. dritten

Maschine hergestellt wurde?

Lösung:

Sei

A: „Ein Produkt ist Ausschuss.”,

B_i : „Ein Produkt wurde auf der Maschine i hergestellt.“

Wir haben:

$P(B_1) = 0.25$, $P(B_2) = 0.35$, $P(B_3) = 0.40$,

$P(A/B_1) = 0.05$, $P(A/B_2) = 0.04$, $P(A/B_3) = 0.02$

1.
$$P(B_1/A) = \frac{0.05 \cdot 0.25}{0.05 \cdot 0.25 + 0.04 \cdot 0.35 + 0.02 \cdot 0.40} = \frac{25}{69},$$

2.
$$P(B_2/A) = \frac{0.04 \cdot 0.35}{0.05 \cdot 0.25 + 0.04 \cdot 0.35 + 0.02 \cdot 0.40} = \frac{28}{69},$$

3.
$$P(B_3/A) = \frac{0.02 \cdot 0.40}{0.05 \cdot 0.25 + 0.04 \cdot 0.35 + 0.02 \cdot 0.40} = \frac{16}{69}.$$

B. 3. 4.
Die Wahrscheinlichkeiten $P(A/B_i)$ heißen *Apriori*-Wahrscheinlichkeiten and die $P(B_i/A)$ *Aposteriori*-Wahrscheinlichkeiten

S. 3. 9.
Gegeben sei eine endliche Menge mit N Elementen, in der $M \le N$ Elementen eine gewisse Eigenschaft besitzen. Es wird eine Stichprobe von $n \le N$ Elementen gewählt.
Die Wahrscheinlichkeit, dass diese Stichprobe $m \le n$ Elementen mit der genannten Eigenschaft enthält ist im Falle

1. *ohne Zurücklegen:*

$$P_{ohne\ Zurücklegent} = \frac{\binom{M}{m} \cdot \binom{N-M}{n-m}}{\binom{N}{n}}$$

2. *mit Zurücklegen*

$$P_{mit\ Zurücklegen} = \binom{n}{m} \cdot p^m \cdot q^{n-m},$$

$$\frac{M}{N} =: p, \qquad q := 1 - p$$

BS. 3. 9.
Eine Kiste enthält 25 Gegenständen, von denen 10 defekt sind. Es werden 2 Gegenstände gewählt.

1. ohne Zurücklegen
2. mit Zurücklegen.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass

i) beide Gegenständeeinwandfrei
ii) genau ein Gegenstand defekt
iii) beide Gegenstände defekt.

Sind.:

Lösung:

$N = 25$, $M = 10$, $n = 2$, $p = \frac{10}{25} = \frac{2}{5}$

	1.		2.
i)	$m = 0$	$P = \frac{7}{20}$	$P = \frac{9}{25}$
ii)	$m = 1$	$P = \frac{1}{2}$	$P = \frac{12}{25}$
iii)	$m = 2$	$P = \frac{3}{20}$	$P = \frac{4}{25}$

(Letzte Aktualisierung: 12.11.2014)