Kapitel II

Der Begriff Wahrscheinlichkeit und deren wichtigste Eigenschaften

<u>D. 2. 1.</u> (*Absolute und relative Häufigkeit*)
Ist bei n *unabhängigen* Wiederholungen eines zufälligen Versuchs (zufällige Versuche, die sich gegenseitig nicht beeinflussen werden als *unabhängig* bezeichnet) ein Ereignis $E \in F$ $H(E)$ aufgetreten wird $H(E)$ als *absolute Häufigkeit* des Ereignisses E und

$$h(E) := \frac{H(E)}{n}$$

als *relative Häufigkeit* des Ereignisses E in n Versuchen bezeichnet.

<u>BS. 2. 1.</u>
Beim Schießen auf eine Zielscheibe beobachten wir das Ereignis

E : „Treffen der Zielscheibe.“

Werden 35 Schüsse auf das Ziel abgegeben und dabei 21 Treffer erzielt, dann gilt:

$$n = 35, \quad H(E) = 21, \quad h(E) = \frac{21}{35} = 0.6$$

<u>B. 2. 1.</u> (*Einige wichtigste Eigenschaften der relativen Häufigkeit*)
Es gilt:

(2. 1.) $$0 \leq h(E) \leq 1$$

(2. 2.) $$h(\Omega) = 1$$

(2. 3.) $$(E_1, E_2 \in F, \quad E_1 \cap E_2 = 0) \;\Rightarrow\; h(E_1 \cup E_2) = h(E_1) + h(E_2)$$

<u>F. 2. 1.</u>
Es gilt:

$$h(\bar{E}) = 1 - h(E).$$

Beweis:

$$\begin{aligned} 1 &= h(\Omega) && (\because \; (2.\,2.)) \\ &= h\left(E \cup \bar{E}\right) \\ &= h(E) + h(\bar{E}) && (\because \; (2.\,3.)) \end{aligned}$$

<u>F. 2. 2.</u>
Sei

$$E_1, E_2 \in F \text{ .}$$

Dann gilt:

$$h(E_1 \cup E_2) = h(E_1) + h(E_2) - h(E_1 \cap E_2) \text{ .}$$

B e w e i s:
Die Aussage folgt aus:

$$E_1 \cup E_2 = E_1 \cup \left(E_2 \setminus E_1 \cap \bar{E}_2 \right),$$

$$E_2 = (E_1 \cap E_2) \cup \left(E_2 \setminus E_1 \cap \bar{E}_2 \right).$$

<u>B. 2. 2.</u>
Aus $h(E) = 1$ bzw. $h(E) = 0$ darf nicht geschlossen werden, dass $E = \Omega$ bzw. $E = \emptyset$ ist.

<u>B. 2. 3.</u>
Mithilfe der relativen Häufigkeit wird jedem Ereignis $E \in F$ eindeutig eine Zahl $h(E)$ zugeordnet. Wir können also sagen, dass mit der Zuordnung $E \to h(E)$ eine Funktion definiert wird, die die in B. 2. 1. genannten Eigenschaften besitzt.

<u>B. 2. 4.</u> (*Stabilität der relativen Häufigkeit*)
$h(E)$ ist eine Größe, die vom Zufall abhängt. Ist die Anzahl n der Wiederholungen eines Versuchs klein, dann kann sich $h(E)$ von Versuchsreihe zu Versuchsreihe stark ändern. Es zeigt sich aber, dass $h(E)$ für hinreichend großes n „in der Nähe" einer für das Ereignis E konstante Zahl zwischen 0 und 1 bleibt, d.h., dass $h(E)$ für das Ereignis E eine gewisse Stabilität aufweist.
Wir können also vermuten, dass es für das Ereignis E tatsächlich eine Konstante gibt, die unabhängig von der Versuchsreihe eine Qualifizierung seiner „Zufälligkeit" gestattet.

Die folgende Tabelle, die die Ergebnisse von Münzwürfeln enthält, verschafft eine Vorstellung von der Stabilität der relativen Häufigkeit:

Name	Anzahl der Würfe	Anzahl des Auftretens des Ereignisses "Wappen"	Relative Häufigkeit
Buffon	4040	2048	0.5069
Pearson	12000	6019	0.5016
Pearson	24000	12012	0.5005

<u>D. 2. 2.</u> (*Statistische* oder *praktische Wahrscheinlichkeit*)
Unter der *statistischen* oder *praktischen Wahrscheinlichkeit* für das Eintreten des Ereignisses E versteht man

$$P(E) := \lim_{n\to\infty} \frac{H(E)}{n}.$$

<u>BS. 2. 2.</u>
In der Abteilung Qualitätskontrolle eines Betriebes wird ein Posten von 1500 Erzeugnissen untersucht. Dabei erweisen sich 1450 Erzeugnisse als normgerecht, davon 900 der Qualitätsstufe I und 550 der Qualitätsstufe II. Lediglich 5o0 Erzeugnisse genügen der Norm nicht
Gesucht sind die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse:

N: „Normgerechte Erzeugnisse“
E: „Qualitätsstufe I“
Z: „Qualitätsstufe II“
A: „Ausschuss“.

Lösung:

$$H(N) = 1450, \quad H(E) = 900, \quad H(Z) = 550, \quad H(A) = 50$$

$$h(N) = \frac{1450}{1500}, \quad h(E) = \frac{900}{1500}, \quad h(Z) = \frac{550}{1500}, \quad h(A) = \frac{50}{1500}$$

$$P(N) \approx 0.967, \quad P(E) \approx 0.600, \quad P(Z) \approx 0.367, \quad P(A) \approx 0.033.$$

<u>D. 2. 3.</u> (*Laplace-sches Ereignisfeld*)
Erfüllt ein Ereignisfeld folgende zusätzliche Forderungen:

1. Das Ereignisfeld ist endlich.
2. Das Auftreten der Elementarereignisse E_i, $i = 1, 2, ..., n$, ist gleichmöglich, dann wird es als Laplace-sches Ereignisfeld bezeichnet.

<u>D. 2. 4.</u> (*Klassische Definition der Wahrscheinlichkeit*)
Die Wahrscheinlichkeit $P(E)$ des Ereignisses $E \in F$, wobei F ein Laplacesches Ereignisfeld ist, errechnet sich zu

$$P(E) := \frac{k}{n}$$

$$= \frac{\text{Anzahl der 'günstigen' Fälle}}{\text{Anzahl der möglichen Fälle}}.$$

BS. 2. 2.
Ein Würfel wird geworfen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit folgender Ereignisse:

$A_j,\ j=1,2,...,6$: „Die Anzahl j würfeln."
A: „Eine gerade Zahl würfeln."
B: „Eine ungerade Zahl würfeln."
C: „Höchstens 5 Augen würfeln."
D: „Eine Augenzahl würfeln, die eine Quadratzahl darstellt."
E: „Eine Augenzahl würfeln, die eine Primzahl ist."
F: „Wenigstens 2 Augen würfeln."
G: „Die Würfelseite mit der Augenzahl 1 liegt unten."

Lösung:

$$P(A_j)=\frac{1}{6},\ j=1,2,...,6, \qquad P(A)=\frac{1}{2}, \qquad P(B)=\frac{1}{2}, \qquad P(C)=\frac{5}{6}, \quad P(D)=\frac{1}{3}$$
$$P(E)=\frac{2}{3}, \qquad P(F)=\frac{5}{6}, \qquad P(G)=\frac{1}{6}.$$

D. 2. 5. **(*Axiomatische Definition der Wahrscheinlichkeit- Kolmogoroff*)**

Axiom I:
Jedem zufälligen Ereignis $E \in F$ sei eine reelle eindeutige Zahl $P(E)$ zugeordnet, die der Bedingung

$$0 \le P(E) \le 1$$

genügt.

Axiom II:
Es gelte

$$P(\Omega)=1.$$

Axiom III:

$$\left\langle E_i \cap E_k = \emptyset,\ i \ne k,\ i,k=1,2,...,n \right\rangle \ \Rightarrow\ \left\langle P\left(\bigcup_{j=1}^{n} E_j\right) = \sum_{j=1}^{n} P(E_j) \right\rangle.$$

Dabei kann n auch speziell ∞ sein.

S. 2. 1.

$$E_1 = E_2 \quad \Rightarrow \quad P(E_1)=P(E_2).$$

S. 2. 2.

$$P(\bar{E}) = 1 - P(E).$$

Beweis:
Es gilt:

$$P(E \cup \bar{E}) = P(E) + P(\bar{E}), \qquad (\because\ E \cap \bar{E} = \varnothing,\ \text{Axiom III})$$

$$1 = P(E) + P(\bar{E}) \qquad (\because\ E \cup \bar{E} = \Omega,\ \text{Axiom II})$$

$$P(\bar{E}) = 1 - P(E).$$

q. e. d.

S. 2. 3.
Es gilt

$$P(\varnothing) = 0\,.$$

Beweis:
Es gilt:

$$P(\varnothing) = 1 - P(\Omega) \qquad (\because \text{S.2.1. für } E = \Omega)$$

$$= 0. \qquad (\because \text{Axiom II})$$

q. e. d.

S. 2. 4.
Es gilt

$$E_1 \subseteq E_2 \ \Rightarrow\ P(E_1) \le P(E_2)\,.$$

Beweis:
Es gilt:

$$E_2 = E_1 \cup (E_1 \cap E_2)$$

$$E_1 \cap (\bar{E}_1 \cap E_2) = \varnothing$$

$$P(E_2) = P(E_1) + P(\bar{E}_1 \cap E_2)$$

$$\ge P(E_1) \qquad (\because P(\bar{E}_1 \cap E_2))$$

q. e. d.

S. 2. 5.
Bilden $E_1, E_2, ..., E_n$ eine vollständige Gruppe, dann gilt

$$\sum_{j=1}^{n} P(E_j) = 1.$$

Beweis:
Es gilt:

$$P\left(\bigcup_{j=1}^{n} E_j\right) = \sum_{j=1}^{n} P(E_j) \qquad (\because \text{ Axiom III})$$

$$P(\Omega) = \sum_{j=1}^{n} P(E_j)$$

$$1 = \sum_{j=1}^{n} P(E_j) \qquad (\because \text{ Axiom II})$$

q. e. d.

(Letzte Aktualisierung: 16.09.10)