Kapitel I

Zufällige Ereignisse und Ereignisalgebra

D. 1. 1. (*Zufälliger Versuch*)
Ein Versuch, der unter Beibehaltung eines festen komplexes von Bedingungen oft wiederholbar ist und dessen Ergebnis im Bereich gewisser Möglichkeiten ungewiss ist, wird als *zufälliger Versuch* bezeichnet.

B. 1. 1.
Durch den Komplex von Bedingungen werden nicht alle Einflüsse erfasst – häufig ist das gar nicht möglich oder nicht erforderlich -, die auf das Ergebnis des Versuchs Auswirkungen haben.

B. 1. 2.
Aus der Forderung der Wiederholbarkeit der Versuche ergibt sich erst die Möglichkeit der Untersuchung der Gesetzmäßigkeit von zufälligen Erscheinungen.

D. 1. 2. (*Zufälliges Ereignis*)
Das Ergebnis eines zufälligen Versuchs wird als *zufälliges Ereignis* bezeichnet.

BS. 1. 1.

Zufälliger Versuch:	Werfen eines Würfels
Zufällige Ereignisse:	Augenzahl $j, \quad j = 1, 2, ..., 6$.

BS. 1. 2.

Zufälliger Versuch:	Erfassung der Anzahl der Ausschussteile auf einer bestimmten Maschine in einer bestimmten Schicht
Zufällige Ereignisse:	Augenzahl $k, \; k = 0, 1, ...$

BS. 1. 3.

Zufälliger Versuch:	Ermittlung der Laufzeit eines Typs von PKW-Reifen unter vorgegebenen Bedingungen
Zufälliges Ereignis:	Laufzeit $t, \; t \in [0, +\infty[$

B. 1. 3.
Ein zufälliges Ereignis ist gekennzeichnet durch die Möglichkeit – nicht die Notwendigkeit – seines Eintritts im Ergebnis eines gewissen zufälligen Versuchs.

B. 1. 4.
Im Folgenden werden wir manchmal statt von einem zufälligen Ereignis kurz von einem Ereignis sprechen, wenn dadurch keine Missverständnisse auftreten können.

B. 1. 5.
Zum Studium der Ereignisse und deren Wechselbeziehung werden ihnen bestimmte Mengen zugeordnet. Umgekehrt werden den Mengen bestimmte Ereignisse zugeordnet.

BS. 1. 1. (*Fortsetzung*)
Sei

$E_i,\ i=1,\ 2,...,6:$ „die Augenzahl i wurde geworfen"

oder

$E_i=\{i\},\ i=1,\ 2,...,\ 6$

BS. 1. 2. (*Fortsetzung*)
Sei

$E_k,\ k=0,1,...:$ „in der Schicht traten k Ausschussteile auf",

oder

$E_k=\{k\},\ k=0,1,...$

BS. 1. 3. (*Fortsetzung*)
Sei

$E_t,\ \in[0,\ +\infty[:$ „in der Schicht traten k Ausschussteile auf",

oder

$E_t=\{t\},\ t\in[0,\ +\infty[$

D. 1. 3. (*Unmögliches Ereignis*)
Ein Ereignis, dass im Ergebnis jeder Wiederholung eines zufälligen Ereignisses niemals eintritt, wird als *unmögliches Ereignis* bezeichnet. Dem unmöglichen Ereignis wird die leere Menge zugeordnet.
Das unmögliche Ereignis bezeichnen wir mit 0.

D. 1. 4. (*Sicheres Ereignis*)
Ein Ereignis, dass im Ergebnis jeder Wiederholung eines zufälligen Ereignisses stets eintritt, wird als *sicheres Ereignis* bezeichnet. Dem sicheren Ereignis wird die Universalmenge zugeordnet.
Das sichere Ereignis bezeichnen wir mit Ω.

BS. 1. 1. (*Fortsetzung*)
Das Ereignis die Augenzahl 8 zu werfen ist ein unmögliches Ereignis. Das Ereignis höchstens die Augenzahl 6 zu werfen ist ein sicheres Ereignis.

D. 1. 5. (*Teilereignis*)
Wenn bei jeder Realisierung eines Bedingungskomplexes, bei der das Ereignis E_1 eintritt, stets auch das Ereignis E_2 eintritt, so nennt man E_1 ein *Teilereignis* von E_2.
Symbolisch:

$$E_1 \subseteq E_2.$$

BS 1. 1. (*Fortsetzung*)
Sei

E_1: “Eine ungerade Zahl werfen.”,
E_2: “Höchstens eine 5 werfen”.

Es gilt:

$$E_1 = \{1,\ 3,\ 5\} \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\} = E_2 .$$

D. 1. 6. (*Äquivalente Ereignisse*)

$$E_1 := E_2 \quad \Leftrightarrow \quad (E_1 \subseteq E_2 \ \wedge \ E_2 \subseteq E_1)$$

D. 1.7. (*Summe der Ereignisse*)
E heißt die *summe der Ereignisse* E_i, $i = 1, 2, ..., n$, wenn mindestens eines der Ereignisse E_i eintritt:

$$E := \bigcup_{i=1}^{n} E_i$$

BS 1. 1. (*Fortsetzung*)
Sei

E_1: “Werfe eine 2 oder ein 4”,
E_2: “Werfe eine 2 oder eine 6”.

Wir haben dann:

$$E_1 = \{2,\ 4\}, \qquad E_2 = \{2,\ 6\},$$

$$E = E_1 \cup E_2 = \{2,\ 4, 6\}$$

D. 1. 8. (*Product der Ereignisse*)
E heißt das *Produkt* der Ereignisse E_i, $i = 1, 2, ..., n$, wenn alle E_i gleichzeitig eintreten:

$$E := \bigcap_{i=1}^{n} E_i$$

BS 1. 1. (*Fortsetzung*)
Sei

E_1: “Werfe eine1 oder eine 4”,
E_2: “Werfe eine Primzahl”.

Wir haben dann:

$$E_1 = \{1,\ 4\}, \qquad E_2 = \{1, 2, 3, 5\},$$

$$E = E_1 \cap E_2 = \{1\}$$

<u>D. 1. 9.</u> (*Unverträgliche bzw. unvereinbare Ereignisse*)
Die Ereignisse E_1 und E_2 heißen *unverträglich* bzw. *unvereinbar*, wenn

$$E_1 \cap E_2 = \varnothing$$

<u>BS 1. 1.</u> (*Fortsetzung*)
Sei

E_1: "werfe eine gerade Zahl",
E_2: "werfe eine ungerade Zahl".

Wir haben dann:

$$E_1 = \{2, 4,\ 6\}, \qquad E_2 = \{1, 2, 3\},$$

$$E_1 \cap E_2 = \varnothing$$

<u>D. 1. 10.</u> (*Komplementärereignisse*)

Die Ereignisse E und $\bar{E}$ heißen *komplementär*, wenn

$$E \cup \bar{E} = \Omega \quad \wedge \quad E \cap \bar{E} = \varnothing$$

<u>BS 1. 1.</u> (*Fortsetzung*)

E_1: "werfe eine gerade Zahl",
E_2: "werfe eine ungerade Zahl".

Wir haben dann:

$$E_1 = \{2, 4,\ 6\}, \qquad E_2 = \{1, 2, 3\},$$

$$E_1 \cup E_2 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = \Omega\ , \qquad E_1 \cap E_2 = \varnothing$$

<u>D. 1. 11.</u> (*Difference*)
Die *Differenz* der Ereignisse E_1 und E_2, bezeichnet mit $E_1 \setminus E_2$, ist das Ereignis, dass E_1 eintritt während das Ereignis E_2 nicht eintritt.

BS 1. 1. (*Fortsetzung*)
Sei

E_1**:** “Werfe eine 1 oder eine 4”,
E_2**:** “Werfe eine 4”.

Wir haben dann:

$$E_1 = \{1, 4\}, \qquad E_2 = \{1\},$$

$$E_1 \setminus E_2 = \{4\}$$

S. 1. 1.
Seien $E_i, i = 1, 2, ..., n$, Zufallsereignisse. Dann gelten:

Die Kommutativgesetze:

$$E_1 \cup E_2 = E_2 \cup E_1$$
$$E_1 \cap E_2 = E_2 \cap E_1.$$

Die Assoziativgesetze:

$$E_1 \cup (E_2 \cup E_3) = (E_2 \cup E_1) \cup E_3 = E_1 \cup E_2 \cup E_3$$
$$E_1 \cap (E_2 \cap E_3) = (E_2 \cap E_1) \cap E_3 = E_1 \cap E_2 \cap E_3$$

Die Distributivgesetze:

$$E_1 \cup (E_2 \cap E_3) = (E_1 \cup E_2) \cap (E_1 \cup E_3)$$
$$E_1 \cap (E_2 \cup E_3) = (E_1 \cap E_2) \cup (E_1 \cap E_3).$$

Außerdem:

$$E \cup E = E, \qquad E \cap E = E$$

$$E \cup \bar{E} = \Omega \qquad E \cap \bar{E} = \varnothing$$

$$E \cup \varnothing = E \qquad E \cap \varnothing = \varnothing$$

$$E \cup \Omega = \Omega \qquad E \cap \Omega = E$$

De Morgan-Gesetze:

$$\overline{\bigcap_{i=1}^{n}} E = \bigcup_{i=1}^{n} \bar{E}_i \,,$$

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n} E_i} = \bigcap_{i=1}^{n} \bar{E}_i \,.$$

<u>BS. 1. 4</u>.
Eine Fabrik besteht aus drei Abteilungen: $A_1,\ A_2,\ A_3$. Sei

$E_i,\quad i = 1, 2, 3$: “Es gibt <u>keine</u> Störung in A_i.

Beschreiben Sie folgende Ereignisse mit Hilfe der Ereignisse $E_i,\quad i = 1, 2, 3$:

A: “Keine Störung in den drei Abteilungen:”

B: “Störung in allen Abteilungen.”

C: “Keine Störung in mindestens eine Abteilung.”

D: “Störung in mindestens einer Abteilung..”

E: “Störung in höchstens einer Abteilung.”

F: “Störung nur in A_3 ”

G: “Störung in A_3.”

Lösung:

$$A = E_1 \cap E_2 \cap E_3$$

$$B = \bar{E}_1 \cap \bar{E}_2 \cap \bar{E}_3 = \overline{E_1 \cup E_2 \cup E_3}$$

$$C = E_1 \cup E_2 \cup E_3$$

$$= (E_1 \cap E_2 \cap E_3)$$

$$\cup (E_1 \cap E_2 \cap \bar{E}_3) \cup (E_1 \cap \bar{E}_2 \cap E_3) \cup (\bar{E}_1 \cap E_2 \cap E_3)$$

$$\cup (E_1 \cap \bar{E}_2 \cap \bar{E}_3) \cup (\bar{E}_1 \cap \bar{E}_2 \cap E_3) \cup (\bar{E}_1 \cap E_2 \cap \bar{E}_3)$$

$$= \Omega \setminus (\bar{E}_1 \cap \bar{E}_2 \cap \bar{E}_3)$$

$$D = \bar{E}_1 \cup \bar{E}_2 \cup \bar{E}_3$$

$$E = (E_1 \cap E_2 \cap E_3) \cup (\bar{E}_1 \cap E_2 \cap E_3) \cup (E_1 \cap \bar{E}_2 \cap E_3) \cup (E_1 \cap E_2 \cap \bar{E}_3)$$

$F = E_1 \cap E_2 \cap \bar{E}_3$

$G = (E_1 \cap E_2 \cap \bar{E}_3) \cup (\bar{E}_1 \cap E_2 \cap \bar{E}_3) \cup (E_1 \cap \bar{E}_2 \cap \bar{E}_3) \cup (\bar{E}_1 \cap \bar{E}_2 \cap \bar{E}_3)$

D. 1. 12. (*Vollständige Gruppe*)
Die Ereignisse E_i, $i = 1, 2, ..., n$, bilden eine *vollständige Gruppe*, wenn sie folgende Bedingungen erfüllen:

1. $E_i \neq \emptyset, \qquad i = 1, 2, ..., n$
2. $\bigcup_{i=1}^{n} E_i = \Omega$
3. $E_i \cap E_j = \emptyset, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 2, ..., n$

BS. 1. 5.
Bilden folgende Ereignisse eine vollständige Gruppe?

1. Versuch: Werfen eines Würfels

E_1 : : „Werfe eine 1 oder eine 4“
E_2 : „Werfe eine ungerade Zahl > 2“
E_3 : “Werfe einer geraden Zahl $\neq 4$“.

$E_1 = \{1, 4\}, \quad E_2 = \{3, 5\}, \quad E_3 = \{2, 6\}.$

Die Ereignisse bilden eine vollständige Gruppe, denn

$E_i \neq \emptyset, \quad i = 1, 2, 3$

$E_1 \cup E_2 \cup E_3 = \Omega$

$E_1 \cap E_2 = \emptyset, \quad E_1 \cap E_3 = \emptyset, \qquad E_2 \cap E_3 = \emptyset$

2. Versuch: Werfen dreier Würfeln:

E_1 : : „Werfe mindestens 17“
E_2 : „Werfe höchstens 5“

$E_1 = \{17, 18\}, \ E_2 = \{3, 4, 5\}.$

Die Ereignisse bilden keine vollständige Gruppe, denn unter anderem:

$$E_1 \cup E_2 \neq \Omega.$$

<u>D. 1. 13.</u> (*Elementarereignis*)
Ein Ereignis, das nicht echt zerlegbar ist, heißt ein *Elementarereignis*.

<u>BS 1. 1.</u> (*Fortsetzung*)

E_1 : „Werfe eine ungerade Zahl“

E_2 : „Werfe eine 6“.

E_1 ist zerlegbar: $E_1 = \{1, 3, 5\} = \{1\} \cup \{3\} \cup \{5\}$; E_2 aber nicht.

(Letzte Aktualisierung: 21.09.10)