

Kapitel IV

Zufallsgrößen und Verteilungsfunktionen

(Aufgaben)

4. 1.

Welche der folgenden Zufälligen Ereignisse sind diskret bzw. stetig?

X_1 : Ertrag eines Getreidefeldes

X_2 : Benzinverbrauch eines PKW

X_3 : Anzahl der Haushalte einer Stadt, die zu einer bestimmten Zeit Elektrizität verbrauchen

X_4 : Die Dauer der Reparatur eines defekten Aggregats

X_5 : Die Anzahl der Kugeln einer Packung, die zur Qualitätsstufe 1 gehören, wenn die hergestellten Kugeln zu je 1000 Stück automatisch abgepackt werden.

4. 2.

Fünf Geräte sollen nacheinander bezüglich ihrer Funktionstüchtigkeit überprüft werden. Es ist bekannt, daß jedes der Geräte mit der Wahrscheinlichkeit 0.1 defekt ist. Die Prüfung wird unterbrochen, wenn sich ein Gerät als defekt erwiesen hat.

Man bestimme die Verteilungstabelle der zufälligen Anzahl X der Überprüfungen, die bis zur ersten Unterbrechung durchgeführt werden.

4. 3.

In einer Werkstatt arbeiten unabhängig voneinander zwei gleichartige Maschinen. Jede dieser Maschinen kann in einem Zeitintervall $]0, T]$ mit der Wahrscheinlichkeit p ausfallen. Die Zufallsgröße X sei die Differenz zwischen der Anzahl der arbeitenden und ausfallenden Maschinen.

1. Ermitteln Sie die Einzelwahrscheinlichkeiten der Zufallsgröße X .

2. Stellen Sie die Verteilungsfunktion für $p = 0.3$ graphisch dar.

4. 4.

Ein Arbeiter stellt aus einem Halbfabrikat ein Finalprodukt her. Die Wahrscheinlichkeit, daß er aus einem Halbfabrikat ein Finalprodukt der höchsten Güteklasse herstellt, sei 0.6. Es sei X die Zahl der Halbfabrikate, die bis zur Herstellung des ersten Finalprodukts der höchsten Güteklasse verbraucht werden.

Ermitteln Sie die Einzelwahrscheinlichkeiten von X .

4. 5.

Ein Gerät besteht aus drei Baugruppen B_1, B_2, B_3 . Die Zuverlässigkeit der Baugruppen betrage:

$$p_1 = 0.75, \quad p_2 = p_3 = q.$$

Die Wahrscheinlichkeit, daß höchstens eine Baugruppe im betrachteten Zeitintervall ausfällt, sei 0.625.

1. Berechnen Sie die Zuverlässigkeit q der Baugruppen B_2 bzw. B_3 .
2. Sei X die Anzahl der ausfallenden Baugruppen. Ermitteln Sie die Verteilungsfunktion der Zufallsgröße X .

4. 6.

Ein Gerät enthält drei störanfällige Elemente. Die Wahrscheinlichkeit eines Ausfalls betrage für die einzelnen Elemente (bezogen auf einen speziellen Zeitraum)

$$p_1 = 0.2, \quad p_2 = p_3 = 0.1.$$

Es sei X die Anzahl der in diesem Zeitraum ausfallenden Elemente.

1. Ermitteln Sie die Einzelwahrscheinlichkeiten von X .
2. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß genau ein Element ausfällt?
3. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß höchstens ein Element ausfällt?
4. Ermitteln Sie die Verteilungsfunktion von X .
5. Stellen Sie die Verteilungsfunktion von X graphisch dar.

4. 7.

Eine stetige Zufallsgröße X besitze die Verteilungsfunktion

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq -1 \\ \frac{3}{4}x + \frac{3}{4} & \text{für } -1 < x \leq \frac{1}{3} \\ 1 & \text{für } \frac{1}{3} < x. \end{cases}$$

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, daß X einen Wert aus dem Intervall $\left]0, \frac{1}{3}\right[$ annimmt.

4. 8.

Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} a(3+x) & \text{für } -3 \leq x \leq 0 \\ a(3-x) & \text{für } 0 < x \leq 3 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

- a) Bestimmen Sie die Konstante a , so daß $f(x)$ Dichtefunktion einer Zufallsvariablen X wird.
- b) Wie sieht die zugehörige Verteilungsfunktion aus?
- c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß die zufällige Variable X Werte im Intervall $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ annimmt?

4. 9.

Die Dichtefunktion einer stetigen Zufallsgröße X ist wie folgt definiert:

$$f(x) := \begin{cases} 0.25x & \text{für } 0 < x \leq 2 \\ 1 - 0.25x & \text{für } 2 < x \leq 4 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} .$$

1. Stellen Sie $f(x)$ graphisch dar.
2. Es sei $F(x)$ die Verteilungsfunktion von X . Berechnen Sie $F(3)$. Interpretieren Sie das Ergebnis.

4. 10.

Gegeben sei eine Zufallsgröße X mit einer Wahrscheinlichkeitsdichte

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq -1 \\ hx + h & -1 < x \leq 0 \\ \frac{h}{2}x + h & 0 < x \leq 2 \\ -2hx + 6h & 2 < x \leq 3 \\ 0 & 3 < x. \end{cases}$$

- a) Bestimmen Sie h und skizzieren Sie anschließend $f(x)$.
- b) Wie lautet die zugehörige Verteilungsfunktion $F(x)$?

4. 11.

Die Verteilungsfunktion $F(x)$ einer stetigen Zufallsgröße X habe die Gestalt

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq 0 \\ \frac{3}{2c}x^2 & \text{für } 0 < x \leq c \\ 1 & \text{für } c < x. \end{cases}$$

1. Ermitteln Sie die zugehörige Dichtefunktion $f(x)$.
2. Bestimmen Sie den Parameter c