Kapitel VII

Einige spezielle stetige Verteilungen

(Lösungen)

7. 1.
Sei

X : „Durchmesser einer Schraube in mm."

1.

$$P(3.88 \leq X < 4.09) = F(4.09) - F(3.88)$$

$$= \Phi\left(\frac{4.09-4}{0.06}\right) - \Phi\left(\frac{3.88-4}{0.06}\right) = \Phi(1.5) - \Phi(-2)$$

$$= \Phi(1.5) - (1-\Phi(2)) = 0.9332 - 1 + 0.9772$$

$$= 0.9104 \,.$$

2.

$$P(X > 4.08) = 1 - P(X \leq 4.08) = 1 - F(4.08)$$

$$= 1 - \Phi\left(\frac{4.08-4}{0.06}\right) = 1 - \Phi\left(1.\bar{3}\right) = 1 - 0.9082 = 0.918 \,,$$

d.h. 9.18% oder etwa $9.18 \cdot 200 = 18$ Schrauben sind größer als 4.08 mm.

3.

$$1 - P(4-c \leq X \leq 4+c) \leq 0.04$$

$$1 - (F(4+c) - F(4-c)) \leq 0.04$$

$$F(4+c) - F(4-c) \geq 0.96$$

$$\Phi\left(\frac{4+c-4}{0.06}\right) - \Phi\left(\frac{4-c-4}{0.06}\right) \geq 0.96$$

$$\Phi\left(\frac{c}{0.06}\right) - \Phi\left(\frac{-c}{0.06}\right) \geq 0.96$$

$$\Phi\left(\frac{c}{0.06}\right) - \left(1 - \Phi\left(\frac{c}{0.06}\right)\right) \geq 0.96$$

$$2 \cdot \Phi\left(\frac{c}{0.06}\right) \geq 1 - 0.96$$

$$\Phi\left(\frac{c}{0.06}\right) \geq 0.98 = \Phi(2.06)$$

$$\frac{c}{0.06} \geq 2.06\,, \qquad c \geq 0.1236\ .$$

4.
Sei

$\tilde{X}$: „Anzahl der Schrauben höchster Qualität.“

$$P\left(\tilde{X} = 2\right) = \binom{4}{2} \cdot 0.6^2 \cdot 0.4^2 = 0.3456\ .$$

5.
Sei

A : „Eine Schraube ist höchster Qualität.“

B : „Eine Schraube ist normgerecht.“

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(B)} = \frac{0.6}{0.9104} = 0.6591$$

7. 2.
Sei
X : **„**der Bedarf“

1.

$$P(X \leq 52) = F(53) = \Phi\left(\frac{53-50}{3}\right) = \Phi(1) = 0.841345\ .$$

2.

$$P(X \leq z) \geq 0.99\,; \qquad F(z) \geq 0.99\ \ P(X \leq z) \geq 0.99\,;$$

$$\Phi\left(\frac{z-50}{3}\right) \geq 2.4\,; \qquad \frac{z-50}{3} \geq 2.4\,;$$

$$z \geq 57.2$$

7. 3.
Sei

X **:** „Anzahl der Punkte.“

1.

$$P(X < 50) = F(50) = \Phi\left(\frac{50-60}{10}\right) = \Phi(-1) = 1 - \Phi(1) = 1 - 0.8413 = 0.1587\,,$$

d.h. rund 16% der Studenten sind durchgefallen.

2.

$$P\left(80 \le X < 95\right) = F\left(95\right) - F\left(80\right) = \Phi\left(\frac{95-60}{10}\right) - \Phi\left(\frac{80-60}{10}\right)$$

$$= \Phi\left(3.5\right) - \Phi\left(2\right) = 1 - 0.9772 = 0.0228\,,$$

d.h. etwa 2.3% erhalten die Note „gut“.

3.

$$P\left(X < z\right) \le 0.1\,,$$

$$F\left(z\right) = \Phi\left(\frac{z-60}{10}\right) \le 0.1\,,$$

$$1 - \Phi\left(\frac{z-60}{10}\right) \le 1 - 0.1 = 0.9$$

$$= \Phi\left(1.28\right)\,,$$

$$\Phi\left(\frac{z-60}{10}\right) \le \Phi\left(-1.28\right)\,,$$

$$z - 60 \le -12.8\,,$$

$$z \ge 47.2\,.$$

Der gesuchte Wert ist also 47.2

7. 4.

$$P(9.97 < X \le 52) = F10.05) - F(9.97) = \Phi\left(\frac{10.05-10}{0.02}\right) - \Phi\left(\frac{9.97-10}{0.02}\right)$$

$$= \Phi(2.5) - \Phi(-1.5) = \Phi(2.5) + \Phi(1.5) - 1 = 0.92698$$

7. 5.
Sei

X : „tatsächlicher Durchmesser“.

$$P\left(4.9 \le X \le 5.1\right) = F\left(5.1\right) - F\left(4.9\right) = \Phi\left(\frac{5.1-5}{0.05}\right) - \Phi\left(\frac{4.9-5}{0.05}\right)$$

$$= \Phi(2) - \left(1 - \Phi\left(2\right)\right) = 2 \cdot \Phi\left(2\right) - 1 = 2 \cdot 0.97725 - 1 = 0.9545$$

7. 6.
Sei

X : „die Ohmzahl“.

1.

$\mu = 152, \quad \sigma^2 = 4, \text{ d.h. } \quad \sigma = 2$

$$P_{\text{var}1} = 1 - P\left(146 \leq X < 154\right)$$

$$= 1 - \left(F\left(154\right) - F\left(146\right)\right)$$

$$= 1 - \left(\Phi\left(\frac{154-152}{2}\right) - \Phi\left(\frac{146-152}{2}\right)\right)$$

$$= 1 - \Phi\left(1\right) + \Phi\left(-3\right)$$

$$= 1 - \Phi\left(1\right) + 1 - \Phi\left(3\right)$$

$$= 2 - 0.8413 - 0.9987$$

$$= 0.16 \ .$$

Es sind also $0.16 \cdot 100000 = 16000$ Ausschussteile zu erwarten.

2.

$\mu = 150, \quad \sigma^2 = 4, \text{ d.h. } \quad \sigma = 2$

$$P_{\text{var}2} = 1 - P\left(146 \leq X < 154\right)$$

$$= 1 - \left(F\left(154\right) - F\left(146\right)\right)$$

$$= 1 - \left(\Phi\left(\frac{154-150}{2}\right) - \Phi\left(\frac{146-150}{2}\right)\right)$$

$$= 1 - \left(\Phi\left(2\right) - \Phi\left(-2\right)\right)$$

$$= 1 - 2 \cdot \Phi\left(2\right) + 1$$

$$= 0.0456 \ .$$

Es sind also $0.0456 \cdot 100000 = 4560$ Ausschussteile zu erwarten.

3.

Berechnung der Kosten:

$K_{\mathrm{var}1} = 16000 \cdot 1.25 = 20000$ €

$K_{\mathrm{var}2} = 4560 \cdot 1.25 + 11000 = 16700$ €.

Damit ist die Variante 2 günstiger.

7. 7.
a)

$P(9.94 \le X < 10.18) = F(10.18) - F(9.94)$

$$= \Phi\left(\frac{10.18-10}{0.1}\right) - \Phi\left(\frac{9.94-10}{0.1}\right)$$

$$= \Phi(1.8) - \Phi(-0.6)$$

$$= \Phi(1.8) - (1 - \Phi(0.6))$$

$$= 0.9641 - 1 + 0.7257$$

$$= 0.6898 .$$

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Welle ist beträgt also 1 - 0.6898 = 0.3102. Damit ist der Ausschussanteil etwa 31 %.

b)

$$1 - P(X < 9.5) = 1 - F(9) \le 0.2 ,$$

$$F(9.5) \ge 0.8 ,$$

$$\Phi\left(\frac{9.5-\mu}{0.1}\right) \ge 0.8 = \Phi(0.84) ,$$

$$\frac{9.5-\lambda}{0.1} \ge 0.84 ,$$

$$9.5 - \lambda \ge 0.084 ,$$

$$\lambda \le 9.416 .$$

7. 8.
Sei

X : „Länge der zugeschnittenen Leisten.“

1.

$$P(199 < X < 202) = F(202) - F(199)$$

$$= \Phi\left(\frac{202-200}{3}\right) - \Phi\left(\frac{199-200}{3}\right)$$

$$= \Phi\left(\frac{2}{3}\right) - \Phi\left(-\frac{1}{3}\right)$$

$$= \Phi\left(\frac{2}{3}\right) - \left(1 - \Phi\left(\frac{1}{3}\right)\right)$$

$$= 0.7475 + 0.6306 - 1$$

$$= 0.3781,$$

also etwa 38%.

2.

$$P\left(\left|X - 200\right| < 2.5\right) = 2\Phi\left(\frac{2.5}{3}\right) - 1$$

$$= 2\Phi\left(0.833\right) - 1$$

$$= 2 \cdot 0.7976 - 1$$

$$= 0.5952 .$$

7. 9.

$$P(100 \leq G < 120) = F(120) - F(100)$$

$$= \Phi\left(\frac{120-106}{\sqrt{10.24}}\right) - \Phi\left(\frac{100-106}{\sqrt{10.24}}\right)$$

$$= \Phi\left(\frac{14}{3.2}\right) - \Phi\left(\frac{-6}{3.2}\right) = \Phi\left(\frac{14}{3.2}\right) - \left(1 - \Phi\left(\frac{6}{3.2}\right)\right)$$

$$= \Phi(4.378) - 1 + \Phi(1.875)$$

$$= 0.9699 .$$

7. 10.
Sei

F : „Das abgefüllte Flüssigkeitsvolumen.“

a)

$$P\left(F < 490\right) = \Phi\left(\frac{490-500}{5}\right) = \Phi\left(-2\right) = 1 - \Phi\left(2\right) = 1 - 0.9772 = 0.0228$$

b)

$$P\left(F>510\right)=1-P\left(F\le 510\right)=1-F\left(510\right)=1-\Phi\left(\frac{510-500}{5}\right)=1-\Phi\left(2\right)=1-0.9772=0.0228$$

7. 11.

$$P(X<E(X))=P\left(X<\frac{1}{\alpha}\right)=F\left(\frac{1}{\alpha}\right)=1-e^{-\alpha\cdot\frac{1}{\alpha}}=1-e^{-1}\approx 0.63$$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist unabhängig von α.

7. 12.

$$E\left(X\right)=\frac{1}{\lambda}=\frac{1}{4},\quad \text{also } \lambda=4\,,$$

$$P\left(X<\frac{1}{3}\right)=\int_0^{\frac{1}{3}}4e^{-4x}dx=0.7355$$

(Letzte Aktualisierung: 29.04.20145)