

# Kapitel VI

## Einige spezielle diskrete Verteilungen

### (Lösungen)

#### 6. 1.

Sei

$X$ : „Die Anzahl der unvollständigen Packungen“.

$X$  ist hypergeometrisch verteilt mit  $N = 50$ ,  $M = 5$ .

a)  $n = 20$

$$P(X = 2) = \frac{\binom{5}{2} \cdot \binom{50-5}{20-2}}{\binom{50}{20}} = 0.3641;$$

b)  $n = 5$

$$P(X = 1) = \frac{\binom{5}{1} \cdot \binom{50-5}{5-1}}{\binom{50}{5}} = 0.3516;$$

c)  $n = 1$

$$P(X = 0) = \frac{\binom{1}{0} \cdot \binom{50-1}{1-0}}{\binom{50}{1}} = 0.9000;$$

#### 6. 2.

Sei

$X$ : „die Anzahl der Hundebisse.“

1.

$$P(X = 6) = 0.050409$$

2.

$$\lambda = 9.$$

$$P(X > 8) = 1 - P(X \leq 8) = 1 - 0.455653 \approx 0.544347$$

**6.3.**

1.

$$P(X = 2) = \frac{0.9636^2}{2!} \cdot e^{-0.9636} = 0.177$$

2.

$$\frac{10}{55} = 0.182$$

**6.4.**

Sei

$X$ : „Die Anzahl der Personen, die einen Kaufvertrag abschließen“.

$X$  ist poisson-verteilt mit

$$p = \frac{2}{1000} = 0.002, \quad n = 800, \text{ d.h. } \lambda = 1.6$$

1.

$$P(X = 0) = \frac{1.6^0}{0!} \cdot e^{-1.6} = 0.201896518$$

2.

$$P(X \leq 2) = \sum_{j=0}^2 \frac{1.6^j}{j!} \cdot e^{-1.6} = 0.201896518 + 0.323034429 + 0.258427543 = 0.78445849$$

3.

$$P(X \geq 3) = 1 - P(X < 3) = 1 - P(X \leq 2) = 0.21664151.$$

**6.5.**

Da keine der Seiten des Buches bevorzugt wird, ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Druckfehler auf eine ganz bestimmte Seite fällt,

$$p = \frac{1}{500}$$

Sei

$X$ : „Die Anzahl der Fehler pro Seite.“

Dann ist  $X$  binomialverteilt mit  $n = 500$ , also

$$\begin{aligned} P(X \geq 3) &= 1 - P(X < 3) = 1 - \sum_{j=0}^2 \binom{500}{j} \cdot \left(\frac{1}{500}\right)^j \cdot \left(\frac{499}{500}\right)^{500-j} \\ &= 1 - 0.919883 = 0.080117 \end{aligned}$$

Approximation durch Poisson-Verteilung:

$$n \cdot p = 500 \cdot \frac{1}{500} = 1 < 10; \quad n = 500 > 1500 \cdot \frac{1}{500} = 3 = 1500 \cdot p$$

$$P(X \geq 3) = 1 - P(X < 3) = 1 - \sum_{j=0}^2 \frac{1^j}{j!} \cdot e^{-1} = 0.080302$$

## 6. 6.

Sei

$X$  : „Anzahl der defekten Buchsen.“

$X$  ist binomialverteilt mit

$$p = 0.03, \quad q = 0.97, \quad n = 100$$

1.

$$P(X = 3) = \binom{100}{3} \cdot 0.03^3 \cdot 0.97^{100-3} = 0.2274741275 \approx 0.2275..$$

2.

$$\begin{aligned} P(X \leq 3) &= \sum_{x_j=0}^3 \binom{100}{x_j} \cdot 0.03^{x_j} \cdot 0.97^{100-x_j} \\ &= 0.04755250793 + 0.14706961214 + 0.22515296292 + 0.22747412748 \\ &= 0.64724921046 \approx 0.6472 \end{aligned}$$

(Wegen

$$n \cdot p = 0.03 \cdot 100 = 3 < 10 \quad \text{und} \quad n = 100 \geq 1500 \cdot 0.03 = 45$$

lassen sich die Ergebnisse von 1-2 auch approximieren:

$$1. \quad P(X = 3) = 0.224042$$

$$2. \quad P(X \leq 3) = 0.647232$$

)

## 6. 7.

Sei

$X$  : „Anzahl der Webstühle, bei denen ein Spulenwechsel erforderlich ist.“

$X$  ist binomialverteilt mit  $n = 12$ ,  $p = \frac{1}{3}$ .

a)

$$P_a = \binom{12}{4} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^8 = 0.2384.$$

b)

$$P_b = \sum_{x_j=0}^3 \binom{12}{x_j} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{x_j} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{12-x_j} = 0.3931.$$

c)

$$P_c = \binom{12}{12} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{12} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^0 = 0.000002.$$

d)

$$P_d = \binom{12}{0} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^0 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{12} = 0.0077$$

e)

$$P_e = 1 - \sum_{x_j=0}^2 \binom{12}{x_j} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{x_j} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{12-x_j} = 0.8189.$$

**6.8.**

$$\lambda = 32 \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{4} = 1$$

a)

$$P(X = 2) = 0.183940$$

b)

$$P(X \leq 2) = 0.367879 + 0.367879 + 0.183940 = 0.919698.$$

**6.9.**

Sei

A: „Die Lieferung wird angenommen.“

Die Zufallsgröße ist hypergeometrisch verteilt:

$$P(A) = \frac{\binom{95}{10} \cdot \binom{5}{0}}{\binom{100}{10}} + \frac{\binom{95}{9} \cdot \binom{5}{1}}{\binom{100}{10}} = 0.923$$

$$P(\bar{A}) = 0.077.$$

Die Kosten mögen mit  $K$ .

$$E(K) = 40 \cdot 0.923 + 200 \cdot 0.077 = 52.32 \text{ €}$$

**6. 10.**

Sei

 $X$  : „Anzahl der Knaben unter den drei Kindern einer Familie.“

$$P(X = 0) = \binom{3}{0} \cdot 0.514^0 \cdot 0.486^3 = 0.114791.$$

**6. 11.**

a)

Binomialverteilung.

b)

$$P(X \leq 1) = \binom{100}{0} \cdot 0.03^0 \cdot 0.97^{100} + \binom{100}{1} \cdot 0.03^1 \cdot 0.97^{99} = 0.0475525 + 0.1470696 = 0.1946221$$

c)

Poisson mit  $\lambda = n \cdot p = 100 \cdot 0.03 = 3$  :

$$. P(X \leq 1) = 0.049787 + 0.149361 = 0.199148.$$

d)

Die Wahrscheinlichkeit nach der Binomialverteilung lässt sich näherungsweise durch die Poisson-Verteilung berechnen,

$$n \cdot p = 3 < 10$$

und

$$n = 100 > 1500 \cdot 0.03 = 45 = 1500 \cdot p.$$

**6. 12.**

Sei

 $X$  : „Die Anzahl der Studenten, die die Klausur bestehen.“ $X$  ist binomialverteilt mit  $n = 5$ ,  $p = 0.7$ .

a)

$$P(X = 0) = \binom{5}{0} \cdot 0.7^0 \cdot 0.3^5 = 0.0024.$$

b)

$$P(X = 1) = \binom{5}{1} \cdot 0.7^1 \cdot 0.3^4 = 0.0284.$$

c)

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - 0.0024 = 0.9976.$$

d)

$$P(X = 2) = \binom{5}{2} \cdot 0.7^2 \cdot 0.3^3 = 0.1323.$$

### 6. 13.

Sei

$X$  : „Der jährliche Bedarf.“

$$\lambda + \sqrt{\lambda} = 4 + \sqrt{4} = 6 : \quad \text{Bestand}$$

$$P(X > 6) = 1 - P(X \leq 5) = 1 - 0.0024 = 0.1107.$$

### 6. 14.

Sei

$$E : \quad \text{„Arbeiter benötigen Energie.“}; \quad P(E) = \frac{12}{60} = 0.2.$$

1.

Sei

$X$  : „Anzahl der Arbeiter, die Energie benötigen.“ ;  $X = 0, 1, \dots, 10$ .

$$P(X = 10) = \binom{10}{10} \cdot 0.2^{10} \cdot 0.8^{10-10} = 1.02 \cdot 10^{-1}.$$

2.

$$P(X = x_j) = \binom{10}{x_j} \cdot 0.2^{x_j} \cdot 0.8^{10-x_j} = \binom{10}{x_j} \cdot 0.8^{10} \cdot \left(\frac{0.2}{0.8}\right)^{x_j} = \binom{10}{x_j} \cdot 0.8^{10} \cdot 0.25^{x_j}.$$

$$P(X = 0) = 0.8^{10}$$

$$P(X = 1) = 10 \cdot 0.8^{10} \cdot 0.25$$

$$P(X = 2) = 45 \cdot 0.8^{10} \cdot 0.25^2 = 0.302 \quad \Rightarrow \quad X_{\max} = 2; \quad P_{\max} = 0.302$$

$$P(X = 3) = 120 \cdot 0.8^{10} \cdot 0.25^3$$

$$P(X = 4) = 210 \cdot 0.8^{10} \cdot 0.25^4$$

$$P(X = 5) = 280 \cdot 0.8^{10} \cdot 0.25^5$$

....

**6. 15.**

Sei

 $X$  : „Die Anzahl der Garagenbesitzer.“

1.

$$P(X = x_j) = \binom{4}{x_j} \cdot 0.75^{x_j} \cdot 0.25^{4-x_j}, \quad j = 0, 1, \dots, 4$$

a) – e)

$$P(X = 0) = 0.00390625,$$

$$P(X = 1) = 0.04687500,$$

$$P(X = 2) = 0.21093750,$$

$$P(X = 3) = 0.42187500,$$

$$P(X = 4) = 0.31640625.$$

2.

$$E(X) = n \cdot p = 4.0 \cdot 0.75 = 3,$$

$$D^2(X) = n \cdot p \cdot q = 3.0 \cdot 0.25 = 0.75.$$

**6. 16.**

Sei

 $X$  : „Anzahl der faulen Eier.“ $X$  ist hypergeometrisch-verteilt mit  $N = 8$ ,  $M = 2$ ,  $n = 3$ .

$$P(X = 0) = \frac{\binom{2}{0} \cdot \binom{8-2}{3-0}}{\binom{8}{3}} = \frac{5}{14}$$

$$1 - P(X = 0) = 1 - \frac{5}{14} = \frac{9}{14}$$

*(Letzte Aktualisierung: 09.06.2015)*