Kapitel VI

Einige spezielle diskrete Verteilungen

(Lösungen)

6. 1.
Sei

X: „Die Anzahl der unvollständigen Packungen“.

X ist hypergeometrisch verteilt mit $N = 50,\ M = 5$.

a) $n = 20,\ x_j = 2$

$$P(X = 2) = \frac{\binom{5}{2} \cdot \binom{50-5}{20-2}}{\binom{50}{20}} = 0.3641;$$

b) $n = 5,\ x_j = 1$

$$P(X = 1) = \frac{\binom{5}{1} \cdot \binom{50-5}{5-1}}{\binom{50}{5}} = 0.3516;$$

c) $n = 1,\ x_j = 0$

$$P(X = 0) = \frac{\binom{5}{0} \cdot \binom{50-5}{1-0}}{\binom{50}{1}} = 0.9000;$$

6. 2.
Sei

X: „die Anzahl der Hundebisse.“

1.

$$P\left(X = 6\right) = 0.050409$$

2.

$\lambda = 9$.

$$P(X > 8) = 1 - P(X \le 8) = 1 - 0.455653 \approx 0.544347$$

6. 3.

1.

$$P\left(X=2\right)=\frac{0.9636^2}{2!}\cdot e^{-0.9636}=0.177$$

2.

$$\frac{10}{55}=0.182$$

6. 4.

Sei

X: „Die Anzahl der Personen, die einen Kaufvertrag abschließen“.

X ist poisson-verteilt mit

$$p=\frac{2}{1000}=0.002\,,\qquad n=800\text{, d.h.}\qquad \lambda=1.6$$

1.

$$P(X=0)=\frac{1.6^0}{0!}=e^{-1.6}=0.201896518$$

2.

$$P(X\le 2)=\sum_{j=0}^{2}\frac{1.6^j}{j!}\cdot e^{-1.6}=0.201896518+0.323034429+0.258427543=0.78445849$$

3.

$$P(X\ge 3)=1-P(X<3)=1-P(X\le 2)=0.21664151.$$

6. 5.

Da keine der Seiten des Buches bevorzugt wird, ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Druckfehler auf eine ganz bestimmte Seite fällt,

$$p=\frac{1}{500}$$

Sei

X: „Die Anzahl der Fehler pro Seite.“

Dann ist X binomialverteilt mit $n=500$, also

$$P(X\ge 3)=1-P\left(X<3\right)=1-\sum_{j=0}^{2}\binom{500}{j}\cdot\left(\frac{1}{500}\right)^j\cdot\left(\frac{499}{500}\right)^{500-j}$$

$$=1-0.919883=0.080117$$

Approximation durch Poisson-Verteilung:

$$n \cdot p = 500 \cdot \frac{1}{500} = 1 < 10\,; \qquad n = 500 > 1500 \cdot \frac{1}{500} = 3 = 1500 \cdot p$$

$$P(X \geq 3) = 1 - P(X < 3) = 1 - \sum_{j=0}^{2} \frac{1^j}{j!} \cdot e^{-1} = 0.080302$$

6. 6.

Sei

X : „Anzahl der defekten Buchsen.“

X ist binomialverteilt mit

$$p = 0.03, \quad q = 0.97, \quad n = 100$$

1.

$$P(X = 3) = \binom{100}{3} \cdot 0.03^3 \cdot 0.97^{100-3} = 0.2274\,.$$

2.

$$P(X \leq 3) = \sum_{x_j=0}^{3} \binom{100}{x_j} \cdot 0.03^{x_j} \cdot 0.97^{100-x_j} = 0.0475 + 0.1470 + 0.2251 + 0.2274 = 0.6470\,.$$

(Wegen

$$n \cdot p = 0.03 \cdot 100 = 3 < 10 \quad \text{und} \quad n = 100 \geq 1500 \cdot 0.03 = 45$$

lassen sich die Ergebnisse von 1-2 auch approximieren:

1. $P(X = 3) = 0.224042$

2. $P(X \leq 3) = 0.647232$

)

6. 7.

Sei

X : „Anzahl der Webstühle, bei denen ein Spulenwechsel erforderlich ist.“

X ist binomialverteilt mit $n = 12, \quad p = \frac{1}{3}$.

a)

$$P_a = \binom{12}{4} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^8 = 0.2384\,.$$

b)

$$P_b = \sum_{x_j=0}^{3} \binom{12}{x_j} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{x_j} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{12-x_j} = 0.3931\,.$$

c)

$$P_c = \binom{12}{12} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{12} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{0} = 0.000002\,.$$

d)

$$P_d = \binom{12}{0} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{0} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{12} = 0.0077$$

e)

$$P_e = 1 - \sum_{x_j=0}^{2} \binom{12}{x_j} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{x_j} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{12-x_j} = 0.8189\,.$$

6. 8.

$$\lambda = 32 \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{4} = 1$$

a)

$$P(X = 2) = 0.183940$$

b)

$$P(X \le 2) = 0.367879 + 0.367879 + 0.183940 = 0.919698\,.$$

6. 9.

Sei

A: „Die Lieferung wird angenommen.“

Die Zufallsgröße ist hypergeometrisch verteilt:

$$P(A) = \frac{\binom{95}{10} \cdot \binom{5}{0}}{\binom{100}{10}} + \frac{\binom{95}{9} \cdot \binom{5}{1}}{\binom{100}{10}} = 0.923$$

$$P\left(\bar{A}\right) = 0.077\,.$$

Die Kosten mögen mit K.

$$E(K) = 40 \cdot 0.923 + +200 \cdot 0.077 = 52.32\ €$$

6. 10.
Sei

X : „Anzahl der Knaben unter den drei Kindern einer Familie.“

$$P(X = 0) = \binom{3}{0} \cdot 0.514^0 \cdot 0.486^3 = 0.114791.$$

6. 11.
a)

Binomialverteilung.

b)

$$P(X \le 1) = \binom{100}{0} \cdot 0.03^0 \cdot 0.97^{100} + \binom{100}{1} \cdot 0.03^1 \cdot 0.97^{99} = 0.0475525 + 0.1470696 = 0.1946221$$

c)

Poisson mit $\lambda = n \cdot p = 100 \cdot 0.03 = 3$:

. $P(X \le 1) = 0.049787 + 0.149361 = 0.199148$.

d)
Die Wahrscheinlichkeit nach der Binomialverteilung lässt sich näherungsweise durch die Poisson-Verteilung berechnen,

$$n \cdot p = 3 < 10$$

und

$$n = 100 > 1500 \cdot 0.03 = 45 = 1500 \cdot p.$$

6. 12.
Sei

X : „Die Anzahl der Studenten, die die Klausur bestehen.“

X ist binomialverteilt mit $n = 5, \quad p = 0.7$.

a)

$$P(X = 0) = \binom{5}{0} \cdot 0.7^0 \cdot 0.3^5 = 0.0024.$$

b)

$$P(X = 1) = \binom{5}{1} \cdot 0.7^1 \cdot 0.3^4 = 0.0284.$$

c)

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - 0.0024 = 0.9976\,.$$

d)

$$P(X = 2) = \binom{5}{2} \cdot 0.7^2 \cdot 0.3^3 = 0.1323\,.$$

6. 13.
Sei

$X:$ „Der jährliche Bedarf.“

$\lambda + \sqrt{\lambda} = 4 + \sqrt{4} = 6:$ Bestand

$$P(X > 6) = 1 - P(X \leq 5) = 1 - 0.0024 = 0.1107\,.$$

6. 14.
Sei

$E:$ „Arbeiter benötigen Energie.“; $P(E) = \dfrac{12}{60} = 0.2\,.$

1.
Sei

$X:$ „Anzahl der Arbeiter, die Energie benötigen.“ ; $X = 0,\ 1,\ ...,\ 10\,.$

$$P(X = 10) = \binom{10}{10} \cdot 0.2^{10} \cdot 0.8^{10-10} = 1.02 \cdot 10^{-1}\,.$$

2.

$$P(X = x_j) = \binom{10}{x_j} \cdot 0.2^{x_j} \cdot 0.8^{10-x_j} = \binom{10}{x_j} \cdot 0.8^{10} \cdot \left(\frac{0.2}{0.8}\right)^{x_j} = \binom{10}{x_j} \cdot 0.8^{10} \cdot 0.25^{x_j}\,.$$

$P(X = 0) = 0.8^{10}$
$P(X = 1) = 10 \cdot 0.8^{10} \cdot 0.25$
$P(X = 2) = 45 \cdot 0.8^{10} \cdot 0.25^2 = 0.302 \quad \Rightarrow \quad X_{\max} = 2\,; \quad P_{\max} = 0.302$
$P(X = 3) = 120 \cdot 0.8^{10} \cdot 0.25^3$
$P(X = 4) = 210 \cdot 0.8^{10} \cdot 0.25^4$
$P(X = 5) = 280 \cdot 0.8^{10} \cdot 0.25$
....

6. 15.
Sei

X : „Die Anzahl der Garagenbesitzer."

1.

$$P(X = x_j) = \binom{4}{x_j} \cdot 0.75^{x_j} \cdot 0.25^{4-x_j}\,, \quad j = 0,\ 1,\ ...,\ 4$$

a) – e)

$P(X = 0) = 0.00390625$,
$P(X = 1) = 0.04687500$,
$P(X = 2) = 0.21093750$,
$P(X = 3) = 0.42187500$,
$P(X = 4) = 0.31640625$.

2.

$$E(X) = n \cdot p = 4.0 \cdot 0.75 = 3\,,$$

$$D^2(X) = n \cdot p \cdot q = 3.0 \cdot 0.25 = 0.75\,.$$

6. 16.
Sei

X : „Anzahl der faulen Eier."

X ist hypergeometrisch-verteilt mit $N = 8,\quad M = 2,\quad n = 3$.

$$P(X = 0) = \frac{\binom{2}{0} \cdot \binom{8-2}{3-0}}{\binom{8}{3}} = \frac{5}{14}$$

$$1 - P(X = 0) = 1 - \frac{5}{14} = \frac{9}{14}$$

(Letzte Aktualisierung: 09.06.2015)