Kapitel V

Parameter der Verteilungen von Zufallsgrößen

(Lösungen)

5. 1.

1.

$$F(x)=\begin{cases}0.00 & -\infty < x \le 0\\ 0.73 & 0 < x \le 1\\ 0.86 & 1 < x \le 2\\ 0.94 & 2 < x \le 3\\ 0.99 & 3 < x \le 4\\ 1.00 & 4 < x < +\infty\end{cases}$$

2.

i) $F(2.5) = 0.94 = P(X < 2.5).$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von 94% verkauft der Kiosk höchstens 2 Exemplare der wissenschaftlichen Zeitschrift

ii) $F(3.8) - F(1.8) = 0.99 - 0.86 = 0.13 = P(1.8 \le X < 3.8).$

iii) Mit einer Wahrscheinlichkeit von 13% verkauft der Kiosk 2 oder 3Exemplare der wissenschaftlichen Zeitschrift

3.

$$E(X) = 0\cdot 0.73 + 1\cdot 0.13 + 2\cdot 0.08 + 3\cdot 0.05 + 4\cdot 0.01 = 0.48.$$

Im Durchschnitt werden täglich 0.48 Exemplare der wissenschaftlichen Zeitschrift verkauft.

$$D^2(X) = 0^2\cdot 0.73 + 1^2\cdot 0.13 + 2^2\cdot 0.08 + 3^2\cdot 0.05 + 4^2\cdot 0.01 - (0.48)^2 = 0.8296\,.$$

$$D(X) = 0.910823803 \approx 0.9108.$$

Die Standardabweichung gibt die durchschnittliche Abweichung of verkaufter Exemplare vom Durchschnitt an.

5. 2.

Sei

X **:** **„**Anzahl der ausfallenden Elemente“.

$$E(X) = \sum_{i=1}^{3} p_i \cdot x_i = 0\cdot(1-p_1)\cdot(1-p_2)\cdot(1-p_3)$$

$$+1\cdot\left[p_1\cdot(1-p_2)\cdot(1-p_3)+p_2\cdot(1-p_1)\cdot(1-p_3)+p_3\cdot(1-p_1)\cdot(1-p_2)\right]$$

$$+2\cdot\left[p_1\cdot p_2\cdot(1-p_3)+p_1\cdot p_3\cdot(1-p_2)+p_2\cdot p_3\cdot(1-p_1)\right]$$

$$+p_1\cdot p_2\cdot p_3$$

$$=p_1+p_2+p_3\,.$$

5. 3.

p_i	0.2	0.4	0.3	0.1	$E(G_I)$	$D(G_I)$	$V(G_I)$
$G_i(40\,ME)$	46	80	60	40	63.2	**15.1**	**0.24**
$G_i(50\,ME)$	32	66	100	80	**70.8**	24.0	0.34

5. 4.

1.

$$\int_0^2 ax\,dx=\left[a\cdot\frac{x^2}{2}\right]_0^2=a\cdot\frac{4}{2}=1\qquad\Rightarrow\qquad a=\frac{1}{2}\,.$$

2.

$$\int_1^{\frac{3}{2}}\frac{1}{2}x\,dx=\left[\frac{x^2}{4}\right]_1^{\frac{3}{2}}=\frac{\frac{9}{4}}{4}-\frac{1}{4}=\frac{9}{16}-\frac{4}{16}=\frac{5}{16}=0.3125\,.$$

3.

$$\int_0^2\frac{1}{2}x^2\,dx=\left[\frac{x^3}{6}\right]_0^2=\frac{4}{3}$$

5. 5.

Sei

$E_i,\quad i=1,2,3$: „ produktiver Einsatz des Monteurs i."

$X=1,2,3$: „Anzahl der produktiv eingesetzten Monteure".

1.

$$P(X=0)=P\left(E_1\cap E_2\cap E_3\right)=0.4^3=0.064$$

$$P(X=1)=0.6\cdot 0.4^2\cdot 3=0.288$$
$$P(X=2)=0.6^2\cdot 0.4\cdot 3=0.432$$
$$P(X=3)=0.6^3=0.216$$

2.

$$E(X)=0\cdot 0.064+1\cdot 0.288+2\cdot 0.432+3\cdot 0.216=1.8$$

3.

$$D^2(X)=0^2\cdot 0.064+1^2\cdot 0.288+2^2\cdot 0.432+3^2\cdot 0.216-1.8^2=0.72$$

5. 6.

a)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\int_0^1 \alpha\cdot x^2\cdot(1-x)dx=1,$$

$$\alpha\cdot\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}\right]_0^1=1,\qquad \alpha\cdot\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)=1,\qquad \alpha\cdot=12.$$

b)

$$F(x)=\begin{cases}0 & x\le 0\\ 12(\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}) & 0<x\le 1\\ 1 & 1<x\end{cases},$$

$$E(X)=\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 12\cdot(x^2-x^3)dx=12\cdot\left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^5}{5}\right]_0^1=12\cdot\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)=\frac{3}{5}.$$

$$D^2(X)=\int_0^1 x^2\cdot f(x)dx-(E(X))^2=12\cdot\int_0^1(x^4-x^5)dx-\frac{9}{5}=12\cdot\left[\frac{x^5}{5}-\frac{x^6}{6}\right]_0^1-\frac{9}{5}=\frac{1}{25}.$$

c)

$$P\left(X<\frac{1}{2}\right)=F\left(\frac{1}{2}\right)=12\cdot\left[\frac{\frac{1}{8}}{3}-\frac{\frac{1}{16}}{4}\right]=0.3125.$$

$$P(X<E(X))=P\left(X<\frac{3}{5}\right)=F\left(\frac{3}{5}\right)=12\cdot\left[\frac{\left(\frac{3}{5}\right)^3}{3}-\frac{\left(\frac{3}{5}\right)^4}{4}\right]=0.4752.$$

5. 7.

Sei

X: „Anzahl der schlechten Stücke in der Stichprobe.“

X ist hypergeometrisch verteilt mit $N = 100, \quad M = 5, \quad n = 100$.

$$P_{Annahme} = \frac{\binom{5}{0} \cdot \binom{100-5}{10-0}}{\binom{100}{10}} + \frac{\binom{5}{1} \cdot \binom{100-5}{100-1}}{\binom{100}{10}} = 0.92314$$

$$P_{Ablehnung} = 1 - 0.92314$$

Die Kosten betragen: $K = 200 \cdot 0.07686 + 5 \cdot 8 \cdot 0.92314 = 52.30$ €

5. 8.

1.

$$\frac{x}{0.5} + \frac{y}{h} = 1 \qquad \Rightarrow \qquad y = h - 2hx$$

$$y - 0 = \frac{h-0}{1-0.5} \cdot (x - 0.5) \qquad \Rightarrow \qquad y = -h + 2hx$$

$$\int_0^{0.5} (h - 2hx)dx + \int_{0.5}^{1} (-h + 2hx)dx = 1$$

$$\left[hx - 2h \cdot \frac{x^2}{2} \right]_0^1 + \left[-hx + 2h \frac{x^2}{2} \right]_{0.5}^1 = 1 \qquad \Rightarrow \qquad h = 2$$

2.

$$f(x) = \begin{cases} -4x + 2 & 0 < x \le 0.5 \\ 4x - 2 & 0.5 < x \le 1 \\ 0 & sonst \end{cases}$$

3.

$$E(X) = \int_0^1 x \cdot f(x)dx = \int_0^{0.5} \left(-4x^2 + 2x\right)dx + \int_{0.5}^{1} \left(4x^2 - 2x\right)dx$$
$$= \left[-4 \cdot \frac{x^3}{3} + 2 \cdot \frac{x^2}{2} \right]_0^{0.5} + \left[4 \cdot \frac{x^3}{3} - 2 \cdot \frac{x^2}{2} \right]_{0.5}^1 = \frac{1}{2}.$$

$$D^2(X) = \int_0^1 x^2 \cdot f(x)dx - \left(E(X)\right)^2 = \int_0^{0.5} \left(-4x^3 + 2x^2\right)dx + \int_{0.5}^{1} \left(4x^3 - 2x^2\right)dx - \frac{1}{4}$$

$$=\left[-4\cdot\frac{x^4}{4}+2\cdot\frac{x^3}{3}\right]_0^{0.5}+\left[4\cdot\frac{x^4}{4}-2\cdot\frac{x^3}{3}\right]_{0.5}^{1}-\frac{1}{4}=0\,.$$

$D(X)=0$

5. 9.

1.

$$\frac{a}{6}+\frac{a}{4}+\frac{a}{12}+a=1 \qquad \Rightarrow \qquad a=\frac{2}{3}\,.$$

2.

2.1.

$$F(x)=\begin{cases}0 & x\le 1\\ \frac{1}{9} & 1<x\le 2\\ \frac{5}{18} & 2<x\le 4\\ \frac{1}{3} & 4<x\le 6\\ 1 & 6<x\end{cases}$$

2.2.

$$E(X)=1\cdot\frac{2}{18}+2\cdot\frac{3}{18}+4\cdot\frac{1}{18}+6\cdot\frac{12}{18}=\frac{14}{3}=2.\bar{6}\,.$$

$$D^2(X)=1^2\cdot\frac{2}{18}+2^2\cdot\frac{3}{18}+4^2\cdot\frac{1}{18}+6^2\cdot\frac{12}{18}-\left(\frac{14}{3}\right)^2=3.\bar{8}$$

$D(X)=1.972$

5. 10.

1.

$$\frac{3}{2}p+\frac{1}{2}p+p+4p^2=1 \ \wedge\ p\ge 0\,.$$

$$4p^2+3p-1=0 \ \wedge\ p\ge 0 \ \Rightarrow \quad p=\frac{1}{4}$$

x_j	0	1	2	3
$P(X=x_j)$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

2.

$$F(x)=\begin{cases}0 & -\infty < x \le 0\\ \frac{3}{8} & 0 < x \le 1\\ \frac{1}{2} & 1 < x \le 2\\ \frac{5}{8} & 2 < x \le 3\\ 1 & 3 < x < +\infty\end{cases}$$

3.

$$P(X < 2) = \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2} = F(2).$$

4.

$$E(X) = 0\cdot\frac{3}{8} + 1\cdot\frac{1}{8} + 2\cdot\frac{1}{4} + 3\cdot\frac{1}{4} = \frac{11}{8} = 1.375$$

$$D^2(X) = 0^2\cdot\frac{3}{8} + 1^2\cdot\frac{1}{8} + 2^2\cdot\frac{1}{4} + 3^2\cdot\frac{1}{4} - \left(\frac{11}{8}\right)^2 = 1.484375\,.$$

$$D(X) = 1.218349293\,.$$

(Letzte Aktualisierung: 02.05.2017)