

## Kapitel V

### Parameter der Verteilungen von Zufallsgrößen

#### (Lösungen)

##### 5. 1.

1.

$$F(x) = \begin{cases} 0.00 & -\infty < x \leq 0 \\ 0.73 & 0 < x \leq 1 \\ 0.86 & 1 < x \leq 2 \\ 0.94 & 2 < x \leq 3 \\ 0.99 & 3 < x \leq 4 \\ 1.00 & 4 < x < +\infty \end{cases}$$

2.

i)  $F(2.5) = 0.94 = P(X < 2.5)$ .

Mit einer Wahrscheinlichkeit von 94% verkauft der Kiosk höchstens 2 Exemplare der wissenschaftlichen Zeitschrift

ii)  $F(3.8) - F(1.8) = 0.99 - 0.86 = 0.13 = P(1.8 \leq X < 3.8)$ .

iii) Mit einer Wahrscheinlichkeit von 13% verkauft der Kiosk 2 oder 3 Exemplare der wissenschaftlichen Zeitschrift

3.

$$E(X) = 0 \cdot 0.73 + 1 \cdot 0.13 + 2 \cdot 0.08 + 3 \cdot 0.05 + 4 \cdot 0.01 = 0.48.$$

Im Durchschnitt werden täglich 0.48 Exemplare der wissenschaftlichen Zeitschrift verkauft.

$$D^2(X) = 0^2 \cdot 0.73 + 1^2 \cdot 0.13 + 2^2 \cdot 0.08 + 3^2 \cdot 0.05 + 4^2 \cdot 0.01 - (0.48)^2 = 0.8296.$$

$$D(X) = 0.910823803 \approx 0.9108.$$

Die Standardabweichung gibt die durchschnittliche Abweichung of verkaufter Exemplare vom Durchschnitt an.

##### 5. 2.

Sei

$X$  : „Anzahl der ausfallenden Elemente“.

$$E(X) = \sum_{i=1}^3 p_i \cdot x_i = 0 \cdot (1 - p_1) \cdot (1 - p_2) \cdot (1 - p_3)$$

$$\begin{aligned}
& + 1 \cdot [p_1 \cdot (1 - p_2) \cdot (1 - p_3) + p_2 \cdot (1 - p_1) \cdot (1 - p_3) + p_3 \cdot (1 - p_1) \cdot (1 - p_2)] \\
& + 2 \cdot [p_1 \cdot p_2 \cdot (1 - p_3) + p_1 \cdot p_3 \cdot (1 - p_2) + p_2 \cdot p_3 \cdot (1 - p_1)] \\
& + p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \\
& = p_1 + p_2 + p_3 \cdot
\end{aligned}$$

### 5.3.

$p_i$	0.2	0.4	0.3	0.1	$E(G_i)$	$D(G_i)$	$V(G_i)$
$G_i(40 ME)$	46	80	60	40	63.2	<b><u>15.1</u></b>	<b><u>0.24</u></b>
$G_i(50 ME)$	32	66	100	80	<b><u>70.8</u></b>	24.0	0.34

### 5.4.

1.

$$\int_0^2 ax \, dx = \left[ a \cdot \frac{x^2}{2} \right]_0^2 = a \cdot \frac{4}{2} = 1 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{1}{2}.$$

2.

$$\int_1^{\frac{3}{2}} \frac{1}{2} x \, dx = \left[ \frac{x^2}{4} \right]_1^{\frac{3}{2}} = \frac{9}{4} - \frac{1}{4} = \frac{9}{16} - \frac{4}{16} = \frac{5}{16} = 0.3125.$$

3.

$$\int_0^2 \frac{1}{2} x^2 \, dx = \left[ \frac{x^3}{6} \right]_0^2 = \frac{4}{3}$$

### 5.5.

Sei

$E_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  : „produktiver Einsatz des Monteurs  $i$ .“

$X = 1, 2, 3$  : „Anzahl der produktiv eingesetzten Monteure“.

1.

$$P(X = 0) = P(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = 0.4^3 = 0.064$$

$$P(X = 1) = 0.6 \cdot 0.4^2 \cdot 3 = 0.288$$

$$P(X = 2) = 0.6^2 \cdot 0.4 \cdot 3 = 0.432$$

$$P(X = 3) = 0.6^3 = 0.216$$

2.

$$E(X) = 0 \cdot 0.064 + 1 \cdot 0.288 + 2 \cdot 0.432 + 3 \cdot 0.216 = 1.8$$

3.

$$D^2(X) = 0^2 \cdot 0.064 + 1^2 \cdot 0.288 + 2^2 \cdot 0.432 + 3^2 \cdot 0.216 - 1.8^2 = 0.72$$

## 5. 6.

a)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_0^1 \alpha \cdot x^2 \cdot (1-x) dx = 1,$$

$$\alpha \cdot \left[ \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right]_0^1 = 1, \quad \alpha \cdot \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) = 1, \quad \alpha = 12.$$

b)

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 12 \left( \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right) & 0 < x \leq 1, \\ 1 & 1 < x \end{cases}$$

$$E(X) = \int_0^1 f(x) \cdot x dx = \int_0^1 12 \cdot (x^2 - x^3) dx = 12 \cdot \left[ \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} \right]_0^1 = 12 \cdot \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{5} \right) = \frac{3}{5}.$$

$$D^2(X) = \int_0^1 x^2 \cdot f(x) dx - (E(X))^2 = 12 \cdot \int_0^1 (x^4 - x^5) dx - \frac{9}{25} = 12 \cdot \left[ \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} \right]_0^1 - \frac{9}{25} = \frac{1}{25}.$$

c)

$$P\left(X < \frac{1}{2}\right) = F\left(\frac{1}{2}\right) = 12 \cdot \left[ \frac{1}{8} - \frac{1}{4} \right] = 0.3125.$$

$$P(X < E(X)) = P\left(X < \frac{3}{5}\right) = F\left(\frac{3}{5}\right) = 12 \cdot \left[ \frac{\left(\frac{3}{5}\right)^3}{3} - \frac{\left(\frac{3}{5}\right)^4}{4} \right] = 0.4752.$$

## 5. 7.

Sei

$X$ : „Anzahl der schlechten Stücke in der Stichprobe.“

$X$  ist hypergeometrisch verteilt mit  $N = 100$ ,  $M = 5$ ,  $n = 100$ .

$$P_{\text{Annahme}} = \frac{\binom{5}{0} \cdot \binom{100-5}{10-0}}{\binom{100}{10}} + \frac{\binom{5}{1} \cdot \binom{100-5}{10-1}}{\binom{100}{10}} = 0.92314$$

$$P_{\text{Ablehnung}} = 1 - 0.92314$$

Die Kosten betragen:  $K = 200 \cdot 0.07686 + 5 \cdot 8 \cdot 0.92314 = 52.30 \text{ €}$

## 5. 8.

1.

$$\frac{x}{0.5} + \frac{y}{h} = 1 \quad \Rightarrow \quad y = h - 2hx$$

$$y - 0 = \frac{h-0}{1-0.5} \cdot (x-0.5) \quad \Rightarrow \quad y = -h + 2hx$$

$$\int_0^{0.5} (h - 2hx) dx + \int_{0.5}^1 (-h + 2hx) dx = 1$$

$$\left[ hx - 2h \cdot \frac{x^2}{2} \right]_0^{0.5} + \left[ -hx + 2h \frac{x^2}{2} \right]_{0.5}^1 = 1 \quad \Rightarrow \quad h = 2$$

2.

$$f(x) = \begin{cases} -4x + 2 & 0 < x \leq 0.5 \\ 4x - 2 & 0.5 < x \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

3.

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_0^1 x \cdot f(x) dx = \int_0^{0.5} (-4x^2 + 2x) dx + \int_{0.5}^1 (4x^2 - 2x) dx \\ &= \left[ -4 \cdot \frac{x^3}{3} + 2 \cdot \frac{x^2}{2} \right]_0^{0.5} + \left[ 4 \cdot \frac{x^3}{3} - 2 \cdot \frac{x^2}{2} \right]_{0.5}^1 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$D^2(X) = \int_0^1 x^2 \cdot f(x) dx - (E(X))^2 = \int_0^{0.5} (-4x^3 + 2x^2) dx + \int_{0.5}^1 (4x^3 - 2x^2) dx - \frac{1}{4}$$

$$= \left[ -4 \cdot \frac{x^4}{4} + 2 \cdot \frac{x^3}{3} \right]_0^{0.5} + \left[ 4 \cdot \frac{x^4}{4} - 2 \cdot \frac{x^3}{3} \right]_{0.5}^1 - \frac{1}{4} = 0.$$

$$D(X) = 0$$

**5.9.**

1.

$$\frac{a}{6} + \frac{a}{4} + \frac{a}{12} + a = 1 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{2}{3}.$$

2.

2.1.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 1 \\ \frac{1}{9} & 1 < x \leq 2 \\ \frac{5}{18} & 2 < x \leq 4 \\ \frac{1}{3} & 4 < x \leq 6 \\ 1 & 6 < x \end{cases}$$

2.2.

$$E(X) = 1 \cdot \frac{2}{18} + 2 \cdot \frac{3}{18} + 4 \cdot \frac{1}{18} + 6 \cdot \frac{12}{18} = \frac{14}{3} = 2.\bar{6}.$$

$$D^2(X) = 1^2 \cdot \frac{2}{18} + 2^2 \cdot \frac{3}{18} + 4^2 \cdot \frac{1}{18} + 6^2 \cdot \frac{12}{18} - \left( \frac{14}{3} \right)^2 = 3.\bar{8}$$

$$D(X) = 1.972$$

**5.10.**

1.

$$\frac{3}{2}p + \frac{1}{2}p + p + 4p^2 = 1 \wedge p \geq 0.$$

$$4p^2 + 3p - 1 = 0 \wedge p \geq 0 \Rightarrow p = \frac{1}{4}$$

$x_j$	0	1	2	3
$P(X = x_j)$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

2.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & -\infty < x \leq 0 \\ \frac{3}{8} & 0 < x \leq 1 \\ \frac{1}{2} & 1 < x \leq 2 \\ \frac{5}{8} & 2 < x \leq 3 \\ 1 & 3 < x < +\infty \end{cases}$$

3.

$$P(X < 2) = \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2} = F(2).$$

4.

$$E(X) = 0 \cdot \frac{3}{8} + 1 \cdot \frac{1}{8} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{1}{4} = \frac{11}{8} = 1.375$$

$$D^2(X) = 0^2 \cdot \frac{3}{8} + 1^2 \cdot \frac{1}{8} + 2^2 \cdot \frac{1}{4} + 3^2 \cdot \frac{1}{4} - \left(\frac{11}{8}\right)^2 = 1.484375.$$

$$D(X) = 1.218349293.$$

(Letzte Aktualisierung: 02.05.2017)