Kapitel IV

Zufallsgrößen und Verteilungsfunktionen

(Lösungen)

4. 1.
stetig, stetig, diskret, stetig, diskret

4. 2.
Sei

A_k : „Das $k-$te Gerät ist defekt" $k = 1, \ 2,...,5$.

Es gilt.

$P(A_k) = 0.1, \quad k = 1, \ 2,...,5$.

$P(X = 1) = P(A_1) = 0.1$

$P(X = 2) = P(\bar{A}_1 \cap A_2) = P(\bar{A}_1) \cdot P(A_2) = 0.9 \cdot 0.1 = 0.09$

$P(X = 3) = P(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap A_3) = 0.9 \cdot 0.9 \cdot 0.1 = 0.081$

$P(X = 4) = P(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3 \cap A_4) = 0.9 \cdot 0.9 \cdot 0.9 \cdot 0.1 = 0.0729$

$P(X = 5) = P(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3 \cap \bar{A}_4) = 0.9 \cdot 0.9 \cdot 0.9 \cdot 0.9 \cdot 0.1 = 0.06561$

Verteilungstabelle:

x_i	1	2	3	4	5
$p(x_i)$	0.1	0.09	0.081	0.0729	0.06561

4. 3.
1.
Es können folgende Fälle unterschieden werden:

Fall 1: Zwei Maschinen arbeiten (0 Maschinen nicht), d. h. $X = 2 - 0 = 2$,
Fall 2: Eine Maschine arbeitet (1 Maschine nicht), d. h. $X = 1 - 1 = 0$,
Fall 3: 0i Maschinen arbeiten (2Maschinen nicht), d. h. $X = 0 - 2 = -2$.

Damit ist: $X = -2, \ 0, \ 2$

$P(X = -2) = 0.9, \quad P(X = 0) = 0.42, \quad P(X = 2) = 0.49$.

Sei E_i: „Maschine i fällt aus", $i = 1,\ 2$.

$$P(X = -2) = P(E_1 \cap E_2) = p \cdot p = p^2$$
$$P(X = 0) = P\left(\left(\bar{E}_1 \cap E_2\right) \cup \left(E_1 \cap \bar{E}_2\right)\right) = P\left(\bar{E}_1 \cap E_2\right) + P\left(E_1 \cap \bar{E}_2\right)$$
$$= p \cdot (1-p) + p \cdot (1-p) = 2p \cdot (1-p)$$
$$P(X = 2) = P\left(\bar{E}_1 \cap \bar{E}_2\right) = (1-p) \cdot (1-p).$$

2.
Mit $p = 0.3$ hat man:

$$P(X = -2) = 0.09, \quad P(X = 0) = 0.42, \quad P(X = 2) = 0.49.$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & -\infty < x \le -2 \\ 0.09 & -2 < x \le 0 \\ 0.51 & 0 < x \le 2 \\ 1 & 2 < x < +\infty \end{cases}$$

4. 4.
Sei

E_i, $i = 1, 2$: „Aus dem $i - ten$ Halbfabrikat wird ein Finalprodukt der höchsten Güteklasse hergestellt."

(Dabei wurde vorausgesetzt, dass die Ereignisse E_i, $i = 1,\ 2$, unabhängig sind.)

$$P(E_i) = 0.60, \quad i = 1, 2$$

$$X = 1, 2, \ldots, \text{ d.h. } x_i = i$$

$$P(X = 1) = 0.6, \qquad P(X = 2) = 0.4 \cdot 0.6, \qquad P(X = 3) = 0.4^2 \cdot 0.6, \ldots$$

Also

$$P(X = i) = 0.4^{i-1}.0.6.$$

4. 5.
Sei

E_i, $i = 1, 2, 3$: „Baugruppe i funktioniert."

$$P(E_1) = 0.75, \quad P(E_2) = P(E_3) = q.$$

1.
$$P\left((E_1 \cap E_2 \cap E_3) \cup \left(\bar{E}_1 \cap E_2 \cap E_3\right) \cup \left(E_1 \cap \bar{E}_2 \cap E_3\right) \cup \left(E_1 \cap E_2 \cap \bar{E}_3\right)\right)$$

$$= 075^3 + 0.25q^2 + 0.75 \cdot \left(1-q\right) \cdot q + 0.75 \cdot (1-q) \cdot q = 0.625\,.$$

$q^2 - 3q + 1.25 = 0$,

$q = 1.5 \pm 1 \wedge q \in [0,\quad 1] \Rightarrow q = 0.5$.

2.

$$2.\ F(x) = \begin{cases} 0 & -\infty < x \le 0 \\ 0.1875 & 0 < x \le 1 \\ 0.8125 & 1 < x \le 2 \\ 0.9375 & 2 < x \le 3 \\ 1 & 3 < x < \infty \end{cases}$$

4. 6.

Sei

E_i, $\quad i = 1, 2, 3:$ $\quad$ „$i-$tes Element fällt aus.“

$P(E_1) = 0.2$, $\qquad P(E_2) = P(E_3) = 0.1$.

$X = 0, 1, 2, 3:$ „Anzahl der ausfallenden Elemente.“

1.

$$P(X = 0) = P(\bar{E}_1 \cap \bar{E}_2 \cap \bar{E}_3) = 0.8 \cdot 0.9 \cdot 0.9 = 0.648$$

$$P(X = 1) = P((E_1 \cap \bar{E}_2 \cap \bar{E}_3) \cup (\bar{E}_1 \cap E_2 \cap \bar{E}_3) \cup (\bar{E}_1 \cap \bar{E}_2 \cap E_3))$$

$$= 0.2 \cdot 0.9 \cdot 0.9 + 0.8 \cdot 0.1 \cdot 0.9 + 0.8 \cdot 0.1 \cdot 0.9 = 0.306$$

$$P(X = 2) = P((E_1 \cap E_2 \cap \bar{E}_3) \cup (E_1 \cap \bar{E}_2 \cap E_3) \cup (\bar{E}_1 \cap E_2 \cap E_3))$$

$$= 0.2 \cdot 0.1 \cdot 0.9 + 0.2 \cdot 0.9 \cdot 0.1 + 0.8 \cdot 0.1 \cdot 0.1 = 0.044$$

$$P(X = 3) = P(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = 0.2 \cdot 0.1 \cdot 0.1 = 0.002$$

2.

$P(X = 1) = 0.306$.

3.

$P(X \le 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = 0.648 + 0.306 = 0.954$.

4.

$F(0) = P(X < 0) = 0$
$F(1) = P(X < 1) = P(X = 0) = 0.648$
$F(2) = P(X < 2) = P(X = 0) + P(X = 1) = 0.954$

$$F(3) = P(X < 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = 0.998$$
$$F(4) = P(X < 4) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) = 1$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 0.648 & 0 < x \leq 1 \\ 0.954 & 1 < x \leq 2 \\ 0.998 & 2 < x \leq 3 \\ 1 & 3 < x \end{cases}$$

(Letzte Aktualisierung: 10.03.05)