Formelsammlung

Stochastik

$$P(E) := \frac{k}{n} = \frac{\text{Anzahl der 'günstigen' Fälle}}{\text{Anzahl der möglichen Fälle}}.$$

Additionssatz

Seien A und B zwei *beliebige* Ereignisse. Dann gilt

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Bedingte Wahrscheinlichkeit

$$P(A/B) := \begin{cases} \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}, & \text{falls} \quad P(B) > 0 \\ 0, & \text{falls} \quad P(B) = 0 \end{cases}$$

Multiplikationssatz für beliebige Ereignisse

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A/B)$$

Spezialfall: unabhängige Ereignisse

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Seien E_i, $i = 1, 2, ..., n$, *unabhängige* Ereignisse.

Dann gilt:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = 1 - \prod_{i=1}^{n} \left(1 - P(E_i)\right).$$

Totale Wahrscheinlichkeit:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A/B_i) \cdot P(B_i)$$

Bayes

$$P(B_i / A) = \frac{P(A/B_i) \cdot P(B_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A/B_i) \cdot P(B_i)}, \qquad i = 1, 2, ..., n.$$

Auswahlschemata

1. *ohne Zurücklegen:*

$$P_{ohne\ Zurücklegent} = \frac{\binom{M}{m} \cdot \binom{N-M}{n-m}}{\binom{N}{n}}$$

2. *mit Zurücklegen*

$$P_{mit\ Zurücklegen} = \binom{n}{m} \cdot p^m \cdot q^{n-m},$$

$$\frac{M}{N} =: p, \qquad q := 1 - p$$

Verteilungsfunktion

$$F(x) = P(X < x) = \begin{cases} 0 & \text{for} \quad x \le x_1 \\ \sum_{i=1}^{k} p_i & \text{for} \quad x_k < x \le x_{k+1}, \quad k = 1,\ 2,\ ...,n-1 \\ 1 & \text{for} \quad x > x_n \end{cases}$$

Einige Eigenschaften der Verteilungsfunktion $F(x)$:

1.

$$0 \le F(x) \le 1, \quad \forall x \in R^1.$$

2.

$$\forall x_1, x_2 : x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad F(x_1) \le F(x_2).$$

3.

$$\forall x_1, x_2 : x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad P(x_1 \le X < x_2) = F(x_2) - F(x_1).$$

4.

$$x \to -\infty \quad \Rightarrow \quad F(x) \to 0$$

$$x \to +\infty \quad \Rightarrow \quad F(x) \to 1.$$

5.

$F(x)$ ist mindestens linksseitig stetig und hat eine endliche Anzahl von Sprungstellen.

Wahrscheinlichkeitsfunktion

x_i	x_1	x_2	...	x_n
$p_i = P(X = x_i) = f(x_i)$	p_1	p_2	...	p_n

Dichtefunktion und deren wichtigsten Eigenschaften

Sei $F(x)$ eine differenzierbare Verteilungsfunktion einer stetigen Zufallsvariablen X . Die Funktion

$$f(x) := F^{'}(x)$$

heißt die *Dichtefunktion* von X .

1.
$$
\begin{aligned}
F(x) &= P(X < x) \\
&= P(-\infty < X < x) \\
&= \int_{-\infty}^{x} f(t)dt .
\end{aligned}
$$

2.
$$
\begin{aligned}
P(a \le X < b) &= F(b) - F(a) \\
&= \int_{a}^{b} f(x)dx .
\end{aligned}
$$

3.
$$P(-\infty < X < +\infty) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 .$$

Erwartungswert

Als *Erwartungswert* einer Zufallsgröße X bezeichnet man:

$$E(X) := \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i \cdot p_i & \text{falls } X \text{ diskret} \\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)dx & \text{falls } X \text{ stetig} \end{cases}$$

Varianz bzw. Dispersion

$$D^2(X) := \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{\infty} \left(x_i - E(X)\right)^2 \cdot p_i & \text{falls } X : \text{ discrete} \\ \int\limits_{.\infty}^{+\infty} \left(x - E(X)\right)^2 \cdot f(x)dx & \text{falls } X : \text{ stetig} \end{cases}$$

bzw.

$$D^2(X) := \begin{cases} \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 \cdot p_i - \left(\sum_{i=1}^{\infty} x_i \cdot p_i \right)^2, & \text{falls } X \text{ diskret} \\ \int_{.\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f(x)dx - \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) \right),^2 & \text{falls } X \text{ stetig} \end{cases}$$

Standardabweichung

$$D(x) > 0$$

Hypergeometrische Verteilung

$$P(X = x) = p_i = \frac{\binom{M}{x} \cdot \binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}}, \qquad x = 0,1,...,n; \quad n \le M \le N .$$

$$E(X) = n \cdot p$$

$$D^2(X) = \frac{N-n}{N-1} n \cdot p \cdot q, \qquad q := 1 - p$$

Binomialverteilung

$$P(X = x) = p_i = \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot q^{n-x}, \quad q := 1 - p, \quad x = 0,\ 1,...,n,.$$

$$E(X) = n \cdot p \ ,$$

$$D^2(X) = n \cdot p \cdot q \ .$$

“Gilt $10 \cdot n \le N$, so kann die hypergeometrische Verteilung durch die Binomialverteilung approximiert werden.“

Poisson-Verteilung

$$P(X = x) = \frac{\lambda^x}{x!} \cdot e^{-\lambda}, \quad x = 0,1,...,n \ .$$

$$E(X) = D^2(X) = n \cdot p = \lambda \ .$$

“Für

$n \cdot p \le 10$ und $n \ge 1500 p$,

kann die Binomialverteilung durch die Poisson-Verteilung approximiert werden.“

Normalverteilung
Eine stetige Zufallsgröße X sei als *normalverteilt* bezeichnet, wenn sie folgende *Wahrscheinlichkeitsdichte* besitzt:

$$
\begin{aligned}
f(x;\mu,\sigma) &= \frac{1}{\sigma}\cdot\varphi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \\
&= \frac{1}{\sigma}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \qquad x\in R^1
\end{aligned}
$$

Eine normalverteilte Zufallsgröße X hat die *Verteilungsfunktion*

$$
\begin{aligned}
F(x;\mu,\sigma) &= \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\frac{x-\mu}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}}dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}dt, \qquad x\in R^1.
\end{aligned}
$$

$$E(X)=\mu,$$

$$D^2(X)=\sigma^2.$$

Standardisierte Normalverteilung
Wegen

$$Z=\frac{X-\mu}{\sigma} \quad \text{mit} \quad E(Z)=0, \qquad D^2(Z)=1$$

erhält man folgende Funktionen:

1. Die *Dichtefunktion der standardisierten Normalverteilung*:

$$f(x)=\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}, \qquad x\in R^1.$$

2. Die *standardisierte Verteilungsfunktion der Normalverteilung*:

$$
\begin{aligned}
F(x) &= \Phi(x) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}dt, \qquad x\in R^1.
\end{aligned}
$$

$$\varphi(-x;\ 0,\ 1)=\varphi(x;\ 0,\ 1),$$

$$\Phi(-x;\ 0,\ 1)=1-\Phi(x;\ 0,\ 1).$$

$$P\left(|X-\mu|<c\right)=2\cdot\Phi\left(\frac{c}{\sigma}\right)-1,\quad c\in R^1.$$

Dreisigmaregel

$$P\left(|X-\mu|<\sigma\right)=0.6828$$
$$P\left(|X-\mu|<2\sigma\right)=0.9544$$
$$P\left(|X-\mu|<3\sigma\right)=0.9972.$$

Dies bedeutet:

Etwa 68% aller Beobachtungswerte liegen im Intervall $[\mu-\sigma,\ \mu+\sigma]$:
Etwa 95% aller Beobachtungswerte liegen im Intervall $[\mu-2\sigma,\ \mu+2\sigma]$:
Etwa 99.7% aller Beobachtungswerte liegen im Intervall $[\mu-3\sigma,\ \mu+3\sigma]$:

Approximation der Binomialverteilung durch die Normalverteilung

Gilt

$$n\cdot p>5 \quad \text{and} \quad n\cdot q>5,$$

dann lässt sich die Binomialverteilung durch die Normalverteilung approximiert werden"

Dabei ist $\mu=n\cdot p$ und $\sigma^2=n\cdot p\cdot q$.