Kapitel III

Testtheorie

<u>B. 3. 1</u> (*Gegenstand*)
Ein statistischer Test hat als Gegenstand die Überprüfung der Gültigkeit einer *Hypothese* anhand der Informationen über eine Stichprobe.

<u>D. 3. 1.</u> (*Nullhypothese, Alternativhypothese*)
Eine *Nullhypothese* ist eine Annahme über einen Parameter der Grundgesamtheit, die als wahr angenommen wird bis sie sich als falsch erweist. Sie wird mit H_0 bezeichnet.

Eine *Alternativhypothese* ist eine Annahme über einen Parameter der Grundgesamtheit, die wahr ist, wenn sich die Nullhypothese als falsch erweist. Sie wird mit H_1 bezeichnet.

<u>D. 3. 2.</u> (*Fehler des Typs I, Fehler des Typs II*)
Fehler des Typs I:

$$\alpha := \{H_0 \text{ wird abgelehnt}/H_0 \text{ ist wahr}\}.$$

Fehler des Typs II:

$$\beta := \{H_0 \text{ wird nicht abgelehnt}/H_0 \text{ ist falsch}\}.$$

<u>B. 3. 2.</u> (*Schematische Darstellung der Fehlertyps I und II*)

		Wirklichkeit	
		H_0 ist wahr	H_0 ist falsch
Schlussfolgerung	H_0 wird *nicht* abgelehnt	richtig	Fehler vom Typ II
	H_0 wird abgelehnt	Fehler vom Typ I	richtig

<u>BS. 3. 1.</u> (*Gerichtsprozess*)

		Wirklichkeit	
		Unschuldig	Schuldig
Urteil	Unschuldig	Richtige Entscheidung	Irrtum
	Schuldig	Irrtum	Richtige Entscheidung

B. 3. 3. (***Einseitige vs. Zweiseitige Tests***)

1. Die Entscheidung für einen *einseitigen* oder *zweiseitigen Test* hängt von der Form der Alternativhypothese ab.
2. Ein einseitiger Test ist dann angebracht, wenn nur ein Unterschied in eine bestimmte Richtung von Bedeutung ist.
   Ein einseitiger Test kann entweder *linksseitig* oder *rechtsseitig* sein.
3. Ein zweiseitiger Test wird dann durchgeführt, wenn keine Vorstellung über die Richtung des Zusammenhangs besteht.

B. 3. 4. (***Testverfahren***)
Es gibt zwei Testverfahren:

1. Die $p-Wert$ - *Methode*
2. Die *Methode des kritischen Wertes*

B. 3. 5. (***Schritte der p-Wert-Methode***)

1. *Formuliere die Hypothesen*
2. *Wähle die*

   i. *Normalverteilung, falls* σ *bekannt*
   ii. *t-Verteilung, falls* σ *unbekannt*

3. *Bestimme den p-Werte mit*

   i. $z = \dfrac{\bar{x} - \mu}{\sigma_{\bar{x}}}$, *falls* σ *bekannt*

   ii. $t = \dfrac{\bar{x} - \mu}{s_{\bar{x}}}$, *falls* σ *unbekannt*

4. *Entscheidung:*

   i. *Lehne* H_0 *ab, wenn* $p-Wert < \alpha$
   ii. *Lehne* H_0 *nicht ab, wenn* $p-Wert \geq \alpha$

BS. 3. 2.
Eine Verbraucherzentrale vermutet, dass eine bestimmte Ware entgegen der Behauptung des Verkäufers weniger als 10 kg wiegt. Es wird eine Stichprobe von 30 Stück gewählt. Dabei wird festgestellt, dass die Stichprobe einen Mittelwert von 9.965 besitzt.
Die Grundgesamtheit ist normalverteilt mit einer Standardabweichung von 0.15 kg.
Testen Sie die Vermutung mit einem Signifikanzniveau von 0.01.

Lösung:
Wir haben:

$$n = 30, \quad \bar{x} = 9.965, \quad \sigma = 0.15, \quad \alpha = 0.01$$

1.

$$H_0: \mu = 10; \quad H_1: \mu < 10.$$

2.
Die Stichprobenverteilung ist normal.

3.

$$z = \frac{9.965 - 10}{\frac{0.15}{\sqrt{30}}} \approx -1.28,$$

$$p - Wert = 1 - 0.8997 = 0.1003.$$

4.

$$0.1003 \geq 0.01.$$

$\therefore$ H_0 wird nicht abgelehnt.

<u>BS. 3. 3.</u>
Eine Firma, die Autobatterien herstellt, behauptet, dass ihre Batterien ein Durchschnittsalter von 45 Monaten haben. Eine Verbraucherzentrale möchte diese Behauptung überprüfen. Dazu wird eine Stichprobe von 24 Batterien genommen. Diese hatten ein Durchschnittsalter von 43.05 Monaten. Alle Batterien dieser Art sind normalverteilt mit einer Standardabweichung von 4.5 Monaten.
Testen Sie die Behauptung der Firma mit einem Signifikanzniveau von 0.025.

Lösung:
Wir haben

$$n = 24, \quad \bar{x} = 43.05, \quad \sigma = 4.5, \quad \alpha = 0.025.$$

1.

$$H_0: \mu = 45; \quad H_1: \mu < 45.$$

2.
Die Stichprobenverteilung ist normal.

3.

$$z = \frac{43.05 - 45}{\frac{4.5}{\sqrt{24}}} \approx -2.12,$$

$$p - Wert = 1 - 0.9830 = 0.0170.$$

4.

$$0.017 < 0.025.$$

$\therefore$ H_0 wird abgelehnt.

BS. 3. 4.
Ein Hersteller produziert in großen Mengen Zylinderscheiben mit einem Solldurchmesser von 20.2 mm. Um die Einhaltung dieses Sollwertes zu überprüfen, wird aus der laufenden Produktion eine Stichprobe von 16 Zylinderscheiben entnommen. Die Auswertung der Stichprobe ergibt einen mittleren Durchmesser von 20.6 mm und einer Standardabweichung von 0.5 mm.
Testen Sie auf einem Signifikanzniveau von 5% die Hypothese, dass der Sollwert eingehalten wird.

Lösung:
Wir haben

$$n = 16, \quad \bar{x} = 20.6, \quad s = 0.5, \quad \alpha = 0.05.$$

1.
$$H_0: \ \mu = 20.2; \quad H_1: \ \mu \neq 20.2. \qquad .$$

2.
Die Stichprobenmittelwerte sind $t-$verteilt.

3.
$$t = \frac{20.6 - 20.2}{\frac{0.5}{\sqrt{16}}} = 3.2 \, ,$$

$$p - Wert = 0.005964 \approx 0.0060 \, .$$

4.
$$0.0060 < 0.05.$$

$\therefore \ H_0$ wird abgelehnt.

BS. 3. 5.
Der Manager eines Restaurants in einer größeren Stadt in den USA behauptet, dass die Kellner in dieser Stadt durchschnittlich mindestens $150 Trinkgeld pro Woche erhalten. Eine Stichprobe von 25 Kellners ergab einen Durchschnitt von $139 und eine Standardabweichung von $28.
Unter der Voraussetzung, dass das wöchentliche Trinkgeld in dieser Stadt normalverteilt ist, testen Sie mit einem Signifikanzniveau von 1% die Behauptung des Managers.

Lösung

$$n = 25, \quad \bar{x} = 139, \quad s = 28, \quad \alpha = 0.01.$$

1.

$$H_0: \ \mu \geq 150 \, ; \qquad H_1: \ \mu < 150 \, .$$

2.
Die Stichprobenmittelwerte sind $t-$verteilt

3.

$$t = \frac{139-150}{\frac{28}{\sqrt{25}}} = -1.964, \qquad p-Wert = 0.0306.$$

4.

$$p-Wert = 0.030607 \geq 0.01.$$

$\because$ H_0 wird *nicht* abgelehnt.

B. 3. 6. **(*Schritte der Methode des kritischen Wertes*)**

1. *Formuliere die Hypothesen*
2. *Wähle die*

   i. *Normalverteilung, falls σ bekannt*
   ii. *t-Verteilung, falls σ unbekannt*

3. *Bestimme die kritischen Werte z_{krit} (falls σ bekannt) bzw. t_{krit} (falls σ unbekannt) und damit die Ablehnungs- bzw. Annahmeregionen.*

4. *Berechne die z_{stat} bzw. t_{stat} :*

   i. $z_{stat} = \frac{\bar{x}-\mu}{\sigma_{\bar{x}}}$, *falls σ bekannt*

   ii. $t_{stat} = \frac{\bar{x}-\mu}{s_{\bar{x}}}$, *falls σ unbekannt*
5. *Entscheidung:*
   Vergleiche z_{stat} mit z_{krit} bzw. t_{stat} mit t_{krit} und je nach dem lehne bzw. nicht lehne H_0 ab.

BS 3. 6. *(Siehe BS. 3. 2.)*

Lösung:

Wir haben:

$$n = 30, \qquad \bar{x} = 9.965, \qquad \sigma = 0.15, \qquad \alpha = 0.01$$

1.

$$H_0: \mu = 10; \qquad H_1: \mu < 10. \qquad .$$

2.
Die Stichprobenverteilung ist normal.

3.

$$z_{krit} = z_{-0.01} = -2.326$$

4.

$$z_{stat} = \frac{9.965-10}{\frac{0.15}{\sqrt{30}}} \approx -1.28$$

5.

$$-1.28 > -2.326.$$

$\therefore$ H_0 wird nicht abgelehnt.

<u>BS. 3. 7.</u> *(Siehe BS. 3. 3.)*

Lösung:

Wir haben

$$n = 24, \quad \bar{x} = 43.05, \quad \sigma = 4.5, \quad \alpha = 0.025.$$

1.

$$H_0 : \mu = 45; \quad H_1 : \mu < 45. \qquad .$$

2.
Die Stichprobenverteilung ist normal.

3.

$$z_{krit} = z_{-0.025} = -1.96$$

4.

$$z_{stat} = \frac{43.05-45}{\frac{4.5}{\sqrt{24}}} \approx -2.12$$

5. $-2.12 < -1.96$

$\therefore$ H_0 wird abgelehnt.

<u>BS. 3. 8.</u> *(Siehe BS. 3. 4.)*

Lösung:
Wir haben

$$n = 16, \quad \bar{x} = 20.6, \quad s = 0.5, \quad \alpha = 0.05.$$

1.

$$H_0 : \mu = 20.2; \quad H_1 : \mu \neq 20.2. \qquad .$$

2.
Die Stichprobenmittelwerte sind $t-$ verteilt.

3.

$$t_{krit} = t_{15;\pm 0.05} = \pm 2.131$$

4.

$$t_{stat} = \frac{20.6 - 20.2}{\frac{0.5}{\sqrt{16}}} = 3.2$$

5.

$$3.2 > 2.131$$

$\therefore$ H_0 wird abgelehnt.

<u>BS 3. 9.</u> *(Siehe BS. 3. 5.)*

Lösung

$$n = 25, \quad \bar{x} = 139, \quad s = 28, \quad \alpha = 0.01.$$

1.

$$H_0: \ \mu \geq 150; \qquad H_1: \ \mu < 150.$$

2.
Die Stichprobenmittelwerte sind $t-$ verteilt

3.

$$t_{krit} = t_{24;0.01} = -2.492$$

4.

$$t_{stat} = \frac{139 - 150}{\frac{28}{\sqrt{25}}} = -1.964.$$

5.

$$-1.964 > -2.492.$$

$\because$ H_0 wird nicht abgelehnt.

(Letzte Aktualisierung: 23.01.2015)