Kapitel IV
Streuungs-, Schiefe und Wölbungsmaße
(Lösungen)

4. 1.

Arbeitstabelle

K_i	H_i	h_i	b_i	$l_i := {}^{h_i}/_{b_i}$	$\sum_{j=1}^{i} h_j$	m_i	$m_i H_i$	$g_i H_i$	$G_i H_i$
K_1	2	0.06	4	0.0150	0.07	18	36	32	40
K_2	9	0.30	10	0.0300	0.37	25	225	180	270
K_3	5	0.17	10	0.0170	0.54	35	175	150	200
K_4	6	0.20	10	0.0200	0.74	45	270	240	300
K_5	5	0.17	10	0.0170	0.90	55	275	250	300
K_6	3	0.10	6	0.0170	1.01*	63	189	180	198
Σ	30	1.01*					1170	1032	1308

* Wegen Rundungsfehler >1.

1.
Siehe die Arbeitstabelle.

2.

$$F(x) = \begin{cases} 0.00 & \text{für} \quad -\infty < x \le 18 \\ 0.07 & \text{für} \quad 16 < x \le 25 \\ 0.37 & \text{für} \quad 25 < x \le 35 \\ 0.54 & \text{für} \quad 35 < x \le 45 \\ 0.74 & \text{für} \quad 45 < x \le 55 \\ 0.90 & \text{für} \quad 55 < x \le 63 \\ 1.00 & \text{für} \quad 63 < x < +\infty \end{cases}$$

3.

a)

$$\bar{x} = \frac{1170}{30} = 39 \text{ Jahre}, \quad 34.40 \le \bar{x} \le 43.60$$

b)

$$h_1 + h_2 = 0.37 , \qquad h_1 + h_2 + h_3 = 0.54 .$$

Der Median liegt in K_3 :

$$\tilde{x}_{0.5} \approx 30 + \frac{0.5 - 0.37}{0.17} \cdot 10 = 37.65 \text{ Jahre}$$

c)

$\tilde{x}_{0.25}$ liegt in K_2:

$$\tilde{x}_{0.25} \approx 20 + \frac{0.25 - 0.07}{0.30} \cdot 10 = 26 \text{ Jahre}$$

$\tilde{x}_{0.75}$ liegt in K_5:

$$\tilde{x}_{0.75} \approx 50 + \frac{0.75 - 0.74}{0.17} \cdot 10 = 50.59 \text{ Jahre}$$

4.

Arbeitstabelle

$\lvert m_i - 37.65\rvert \cdot H_i$	$\lvert m_i - 39\rvert \cdot H_i$	$(m_i - 37.65)^2 \cdot H_i$	$(m_i - 39)^2 \cdot H_i$
39.30	42.00	772.25	882.00
113.85	126.00	1440.20	1764.00
13.25	20.00	35.10	80.00
44.11	36.00	324.14	216.00
86.75	80.00	1505.11	1280.00
76.05	72.00	1927.87	1728.00
373.31	376.00	6004.67	5950.00

a)

$d_{x_{0.5}} \approx 12.44$, $\qquad d_{\bar{x}} \approx 12.53$

b)

$d_{0.5}^2 \approx 200.16$, $\qquad s^2 \approx 205.17$

c)

$QA = 50.59 - 26.00 = 24.59$

4. 2.

1.

Arbeitstabelle 1

g_i	G_i	H_i	h_i	$\sum_{j=1}^{i} h_j$	m_i	b_i	$l_i := \frac{h_i}{b_i}$
145	150	3	0,15	0,15	147.5	5	0,03
150	155	3	0,15	0,30	152.5	5	0,03
155	160	4	0,20	0,50	157.5	5	0,04
160	165	5	0,25	0,75	162.5	5	0,05
165	170	3	0,15	0,90	167.5	5	0,03
170	175	1	0,05	0,95	172.5	5	0,01
175	180	1	0,05	1,00	177.5	5	0,01
		20	1				

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \textit{für} \quad -\infty < x \le 147.5 \\ 0.15 & \textit{für} \quad 147.5 < x \le 152.5 \\ 0.30 & \textit{für} \quad 152.5 < x \le 157.5 \\ 0.50 & \textit{für} \quad 157.5 < x \le 162.5 \\ 0.75 & \textit{für} \quad 162.5 < x \le 167.5 \\ 0.90 & \textit{für} \quad 167.5 < x \le 172.5 \\ 0.95 & \textit{für} \quad 172.5 < x \le 177.5 \\ 1.00 & \textit{für} \quad 177.5 < x + \infty \end{cases}$$

Die graphischen Darstellungen werden den Studierenden überlassen.

2.
Sei X :Körpergröße in cm. Dann gilt:

$$A(X \ge 170) = 1 - A(X < 170) = 1 - F(170) = 1 - 0.90 = 0.10 \text{ (also etwa 10\%)}.$$

3.

$$F(169) - F(153) = 0.90 - 0.30 = 0.60 = A(153 \le X < 169)$$

Etwa 45% der Schüler sind mindestens 169 cm und weniger als 153 cm groß.

4.

Arbeitstabelle

g_i	G_i	H_i	m_i	$m_i \cdot H_i$	$g_i \cdot H_i$	$G_i \cdot H_i$
145	150	3	147.5	442.5	435.0	450.0
150	155	3	152.5	457.0	450.0	465.0
155	160	4	157.5	630.0	620.0	640.0
160	165	5	162.5	812.5	800.0	825.0
165	170	3	167.5	502.5	495.0	510.0
170	175	1	172.5	172.5	170.0	175.0
175	180	1	177.5	177.5	175.0	180.0
		20		3195.0	3145.0	3245.0

a.

$$\bar{x} \approx \frac{3195.00}{20} = 159.75\,; \qquad 157.25 = \frac{3145}{20} \le \bar{x} \le \frac{3245}{20} = 162.25$$

b.

$$h_1 + h_2 + h_3 = 0.5 \geq 0.5 \text{, d.h. } Me \in \left]155,\ 160\right]$$

$$Me \approx 155 + \frac{0.5 - \frac{7}{20}}{\frac{3}{20}} \cdot 5 = 160$$

Etwa 50% der Schüler sind höchstens 160 cm groß und etwa 50% mindestens 160 cm.

c.

$$h_1 + h_2 = 0.30 \geq 0.25 \text{, d.h. } \tilde{x}_{0.25} \in \left]150,\ 155\right]$$

$$\tilde{x}_{0.25} \approx 150 + \frac{0.25 - 0.15}{0.15} \cdot 5 = 153.33$$

Etwa 25% der Schüler sind höchstens 153.33 cm groß und etwa 75% mindestens 153.33 cm.

$$h_1 + h_2 + h_3 + h_4 = 0.75 \geq 0.75 \text{, d.h. } \tilde{x}_{0.75} \in \left]160,\ 165\right] [160, 165]$$

$$\tilde{x}_{0.75} \approx 160 + \frac{0.75 - 0.50}{0.25} \cdot 5 = 165$$

Etwa 75% der Schüler sind höchstens 165 cm groß und etwa 25% mindestens 165 cm.

$$QA \approx 165.00 - 153.33 = 11.67$$

d.

H_i	m_i	$(m_i - 159.75)^2 \cdot H_i$
3	147.5	450.1875
3	152.5	157.6875
4	157.5	20.2500
5	162.5	37.8125
3	167.5	180.1875
1	172.5	162.5625
1	177,5	315,0625
20		1323.7500

$$s^2 \approx \frac{1323.75}{19} \approx 69.67, \quad s \approx 8.35$$

Damit liegen mindestens 50% der beobachteten Werte der Körpergröße im Intervall

$$[195.75-8.35,\ 195.75+8.35]=[187.40,\ 204.10]$$

Andererseits ist das arithmetische Mittel wegen

$$v=\frac{8.35}{195.75}\approx 0.04<0.5$$

repräsentativ.

4. 3.

Arbeitstabelle

g_i	G_i	H_i	h_i	$\sum_{j=1}^{i} h_j$	m_i
0.0	0.50	7	0.28	0.28	0.25
0.5	1.00	5	0.2	0.48	0.75
1.0	2.00	7	0.28	0.76	1.50
2.0	3.00	3	0.12	0.88	2.50
3.0	5.00	2	0.08	0.96	4.00
5.0	7.00	1	0.04	1.00	6.00
		25	1.00		

1.

$$F(x)=\begin{cases} 0.00 & \textit{für} \quad -\infty < x \le 0.25 \\ 0.28 & \textit{für} \quad 0.25 < x \le 0.75 \\ 0.48 & \textit{für} \quad 0.75 < x \le 1.50 \\ 0.76 & \textit{für} \quad 1.50 < x \le 2.50 \\ 0.88 & \textit{für} \quad 2.50 < x \le 4.00 \\ 0.96 & \textit{für} \quad 4.00 < x \le 6.00 \\ 1.00 & \textit{für} \quad 6.00 < x < +\infty \end{cases}$$

x	$F(x)$
]-∞ , 0.25]	0.00
]0.25 , 0.75]	0.28
]0.75 , 1.50]	0.48
]1.50 , 2.50]	0.76
]2.50 , 4.00]	0.88
]4.00 , 6.00]	0.96
]6.00 , ∞ [	1.00

$F(2.5) = 0.76$, d.h. 76% der Kühlaggregate haben eine Lebensdauer von weniger als 2.5 Jahren.

$F(3.5) - F(1.0) = 0.88 - 0.48$, d.h. 40% der Kühlaggregate haben eine Lebensdauer von mindestens 1 Jahr, aber weniger als 3.5 Jahren.

2.

Arbeitstabelle

g_i	G_i	H_i	m_i	$m_i \cdot H_i$	$g_i \cdot H_i$	$G_i \cdot H_i$
0.0	0.50	7	0.25	1.75	0.0	3.5
0.5	1.00	5	0.75	3.75	2.5	5.0
1.0	2.00	7	1.50	10.50	7.0	14.0
2.0	3.00	3	2.50	7.50	6.0	9.0
3.0	5.00	2	4.00	8.00	6.0	10.0
5.0	7.00	1	6.00	6.00	5.0	7.0
		25		37.50	26.5	48.5

$$\bar{x} \approx \frac{37.50}{25} = 1.5\,; \qquad 1.06 = \frac{26.5.}{25} \le \bar{x} \le \frac{48.5}{25} = 1.94$$

Der Modus existiert *nicht*.

$$h_1 + h_2 + h_3 = 0.76 \ge 0.50, \text{ d.h. } \tilde{x}_{0.5} \in [1.0,\, 2.0]$$

$$\tilde{x}_{0.5} \approx 1 + \frac{0.50 - 0.48}{0.28} \cdot 1 \approx 1.07$$

$$h_1 = 0.28 \ge 0.25, \text{ d.h. } \tilde{x}_{0.25} \in [0.0,\, 0.50]$$

$$\tilde{x}_{0.25} \approx 0 + \frac{0.20 - 000}{0.28} \cdot 0.5 \approx 0.45$$

$$h_1 + h_2 + h_3 = 0.76 \ge 0.75, \text{ d.h. } \tilde{x}_{0.75} \in [1.0,\, 2.0]$$

$$\tilde{x}_{0.75} \approx 1 + \frac{0.75 - 0.48}{0.28} \cdot 1 \approx 1.96$$

3.

Arbeitstabelle

H_i	m_i	$\lvert m_i - 1.07 \rvert \cdot H_i$	$\lvert m_i - 1.50 \rvert \cdot H_i$	$(m_i - 1.07)^2 \cdot H_i$	$(m_i - 1.50)^2 \cdot H_i$
7	0.25	5.74	8.8	4.7	10.9375
5	0.75	1.60	3.8	0.5	2.8125
7	1.50	3.01	0.0	1.3	0.0000
3	2.50	4.29	3.0	6.1	3.0000
2	4.00	5.86	5.0	17.2	12.5000
1	6.00	4.93	4.5	24.3	20.2500
25		25.43	25.0	54.1	49.5000

$R \approx 7 - 0 = 7$

$QA \approx 1.96 - 0.45 = 1.51$

$d_{\bar{x}_{0.5}} \approx \dfrac{25.43}{25} = 1.0172$, $\quad d_{\bar{x}} \approx \dfrac{25.00}{25} = 1$

$d^2_{\bar{x}_{0.5}} \approx \dfrac{54.1}{25} = 2.164$, $\quad s^2 \approx \dfrac{49.50}{25} = 2.0625$, $\quad s \approx 1.44$,

$v \approx \dfrac{1.44}{1.50} = 0.96$

4. 4.

Arbeitstabelle

Abnehmer	Preis x_i	Absatz $H(a_i)$	Umsatz $x_i \cdot H(a_i)$	$\lvert x_i - \bar{x} \rvert \cdot H(a_i)$
A	6	70	420	80.50
B	8	30	240	25.50
C	9	30	270	55.50
Summen		130	930	161.50

a)

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_i x_i \cdot H(a_i) = \frac{930}{130} = 7.15 \text{ GE}$$

b)

$$d_{\bar{x}} = \frac{161.50}{130} = 1.24$$

Bedingt durch die unterschiedliche Anzahl von abgesetzten Stücken je Preisklasse streuen die Preise im Durchschnitt um 1.24 GE um das arithmetische Mittel.

4.5.

$$v_1 := \frac{s_1}{\bar{x}_1} \cdot 100 = \frac{0.32}{7.82} \cdot 100 \approx 4.09\,\%$$

$$v_2 := \frac{s_2}{\bar{x}_2} \cdot 100 = \frac{0.22}{78.24} \cdot 100 \approx 2.67\%$$

In dem ersten Unternehmen streuen die Löhne im Durchschnitt um 4.09% um das arithmetische Mittel, im zweiten Unternehmen um 2.67%; d.h., die Lohnstruktur ist im zweiten Unternehmen ausgeglichener.

4. 6.

(1)

a)

g_i	G_i	H_i	m_i	$m_i \cdot H_i$	$g_i \cdot H_i$	$G_i \cdot H_i$
0	10	4	5	20	0	40
10	20	3	15	45	30	60
20	30	6	25	150	120	180
30	40	8	35	280	240	320
40	50	2	45	90	80	100
Summe		23		585	470	700

$$\bar{x} \approx \frac{589}{23} = 25.43 \text{ Jahre}, \quad 20.43 = \frac{470}{23} \leq \bar{x} \leq \frac{700}{23} = 30.43$$

b)

g_i	G_i	H_i	h_i	$\sum_{j=1}^{i} h_j$
0	10	4	4/23	4/23
10	20	3	3/23	7/23
20	30	6	6/23	13/23
30	40	8	8/23	21/23
40	50	2	2/23	23/23
Summe		23	1	

$$Me \in [20,30[$$

$$Me \approx 20 + \frac{0.5 - \frac{7}{23}}{\frac{6}{23}} \cdot 10 = 27.5 \text{ Jahre}$$

c)

$$Mo \approx 30 + \frac{\frac{8}{23} - \frac{6}{23}}{2 \cdot \frac{8}{23} - \frac{6}{23} - \frac{2}{23}} \cdot 10 = 32.5 \text{ Jahre}$$

(2)

H_i	m_i	$\lvert m_i - 25.43 \rvert . H_i$	$(m_i - 25.43)^2 \cdot H_i$
4	5	81.72	1669.5396
3	15	31.29	326.3547
6	25	2.58	1.1094
8	35	76.56	732.6792
2	45	39.14	765.9698
Summen		231.29	3495.6527

a)

$$d_{\bar{x}} \approx \frac{231.29}{23} = 10.06$$

b)

$$s^2 \approx \frac{3495.6527}{22} = 158.8933\,; \qquad s \approx 12.61$$

Mindestens 50 % der Schiffe sind mindestens 25.43 – 12.61 = 12.82 und höchstens 25.43 + 12.61 = 37.14 Jahre alt.

(3)

$$S = \frac{25.43 - 32.50}{12.61} = -0.56$$

Es handelt sich um eine rechtssteile Kurve.

4. 8.

Arbeitstabelle

g_i	G_i	H_i	h_i	$\sum_{j=1}^{i} h_j$	b_i	$l_i := \frac{h_i}{b_i}$	m_i	$m_i \cdot H$	$g_i \cdot H_i$	$G_i \cdot H_i$	$(m_i - \bar{x})^2 \cdot H_i$
0	10	32	0.256	0.256	10	0.026	5.0	160.0	0	320	30356.48
10	20	40	0.320	0.576	10	0.032	15.0	600.0	400	800	17305.60
20	45	25	0.200	0.776	25	0.008	32.5	812.5	500	1125	272.25
45	90	13	0.104	0.880	45	0.002	67.5	877.5	585	1170	13063.57
90	180	15	0.120	1.000	90	0.001	135.0	2025.0	1350	2700	147609.60
		125	1.000					4475	2835	6115	208607.50

1.

$$F(x)=\begin{cases}0.000 & \text{when} \quad -\infty < x \le 5.0\\ 0.256 & \text{when} \quad 5.0 < x \le 15.0\\ 0.576 & \text{when} \quad 15.0 < x \le 32.5\\ 0.776 & \text{when} \quad 32.5 < x \le 67.5\\ 0.880 & \text{when} \quad 67.5 < x \le 135.0\\ 1.000 & \text{when} \quad 135.0 < x < +\infty\end{cases}$$

$F(23)=0.576$.

Etwa 57.6 % der Wartezeit ist kürzer als 23 Minuten.

2.

$$\mu \approx \frac{4475}{125} \approx 35.8, \qquad \frac{2836}{125}=22.68 \le \mu \le 48.92=\frac{6115}{125}$$

$$\sigma^2 \approx \frac{208607.5}{125} \approx 1668.86, \qquad \sigma \approx 40.85,$$

$$\mu \in [35.8-40.85, \quad 35.8+40.85] = [-5.05. \quad 76.65].$$

Mindestens 50% der Wartezeit liegt im obigen Intervall.

(Letzte Aktualisierung: 07.08.2017)