

# Kapitel IV

## Streuungs-, Schiefe und Wölbungsmaße (Lösungen)

### 4. 1.

*Arbeitstabelle*

$K_i$	$H_i$	$h_i$	$b_i$	$l_i := h_i/b_i$	$\sum_{j=1}^i h_j$	$m_i$	$m_i H_i$	$g_i H_i$	$G_i H_i$
$K_1$	2	0.06	4	0.0150	0.07	18	36	32	40
$K_2$	9	0.30	10	0.0300	0.37	25	225	180	270
$K_3$	5	0.17	10	0.0170	0.54	35	175	150	200
$K_4$	6	0.20	10	0.0200	0.74	45	270	240	300
$K_5$	5	0.17	10	0.0170	0.90	55	275	250	300
$K_6$	3	0.10	6	0.0170	1.01*	63	189	180	198
$\Sigma$	30	1.01*					1170	1032	1308

\* Wegen Rundungsfehler  $> 1$ .

1.

Siehe die Arbeitstabelle.

2.

$$F(x) = \begin{cases} 0.00 & \text{für } -\infty < x \leq 18 \\ 0.07 & \text{für } 16 < x \leq 25 \\ 0.37 & \text{für } 25 < x \leq 35 \\ 0.54 & \text{für } 35 < x \leq 45 \\ 0.74 & \text{für } 45 < x \leq 55 \\ 0.90 & \text{für } 55 < x \leq 63 \\ 1.00 & \text{für } 63 < x < +\infty \end{cases}$$

3.

a)

$$\bar{x} = \frac{1170}{30} = 39 \text{ Jahre, } 34.40 \leq \bar{x} \leq 43.60$$

b)

$$h_1 + h_2 = 0.37, \quad h_1 + h_2 + h_3 = 0.54.$$

Der Median liegt in  $K_3$  :

$$\tilde{x}_{0.5} \approx 30 + \frac{0.5 - 0.37}{0.17} \cdot 10 = 37.65 \text{ Jahre}$$

c)

$\tilde{x}_{0.25}$  liegt in  $K_2$ :

$$\tilde{x}_{0.25} \approx 20 + \frac{0.25 - 0.07}{0.30} \cdot 10 = 26 \text{ Jahre}$$

$\tilde{x}_{0.75}$  liegt in  $K_5$ :

$$\tilde{x}_{0.75} \approx 50 + \frac{0.75 - 0.74}{0.17} \cdot 10 = 50.59 \text{ Jahre}$$

4.

*Arbeitstabelle*

$ m_i - 37.65  \cdot H_i$	$ m_i - 39  \cdot H_i$	$(m_i - 37.65)^2 \cdot H_i$	$(m_i - 39)^2 \cdot H_i$
39.30	42.00	772.25	882.00
113.85	126.00	1440.20	1764.00
13.25	20.00	35.10	80.00
44.11	36.00	324.14	216.00
86.75	80.00	1505.11	1280.00
76.05	72.00	1927.87	1728.00
373.31	376.00	6004.67	5950.00

a)

$$d_{x_{0.5}} \approx 12.44, \quad d_{\bar{x}} \approx 12.53$$

b)

$$d_{0.5}^2 \approx 200.16, \quad s^2 \approx 205.17$$

c)

$$QA = 50.59 - 26.00 = 24.59$$

**4. 2.**

1.

*Arbeitstabelle 1*

$g_i$	$G_i$	$H_i$	$h_i$	$\sum_{j=1}^i h_j$	$m_i$	$b_i$	$l_i := \frac{h_i}{b_i}$
145	150	3	0,15	0,15	147.5	5	0,03
150	155	3	0,15	0,30	152.5	5	0,03
155	160	4	0,20	0,50	157.5	5	0,04
160	165	5	0,25	0,75	162.5	5	0,05
165	170	3	0,15	0,90	167.5	5	0,03
170	175	1	0,05	0,95	172.5	5	0,01
175	180	1	0,05	1,00	177.5	5	0,01
		20	1				

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } -\infty < x \leq 147.5 \\ 0.15 & \text{für } 147.5 < x \leq 152.5 \\ 0.30 & \text{für } 152.5 < x \leq 157.5 \\ 0.50 & \text{für } 157.5 < x \leq 162.5 \\ 0.75 & \text{für } 162.5 < x \leq 167.5 \\ 0.90 & \text{für } 167.5 < x \leq 172.5 \\ 0.95 & \text{für } 172.5 < x \leq 177.5 \\ 1.00 & \text{für } 177.5 < x + \infty \end{cases}$$

Die graphischen Darstellungen werden den Studierenden überlassen.

2.

Sei  $X$  : Körpergröße in cm. Dann gilt:

$$A(X \geq 170) = 1 - A(X < 170) = 1 - F(170) = 1 - 0.90 = 0.10 \text{ (also etwa 10\%) .}$$

3.

$$F(169) - F(153) = 0.90 - 0.30 = 0.60 = A(153 \leq X < 169)$$

Etwa 45% der Schüler sind mindestens 169 cm und weniger als 153 cm groß.

4.

*Arbeitstabelle*

$g_i$	$G_i$	$H_i$	$m_i$	$m_i \cdot H_i$	$g_i \cdot H_i$	$G_i \cdot H_i$
145	150	3	147.5	442.5	435.0	450.0
150	155	3	152.5	457.0	450.0	465.0
155	160	4	157.5	630.0	620.0	640.0
160	165	5	162.5	812.5	800.0	825.0
165	170	3	167.5	502.5	495.0	510.0
170	175	1	172.5	172.5	170.0	175.0
175	180	1	177.5	177.5	175.0	180.0
		20		3195.0	3145.0	3245.0

a.

$$\bar{x} \approx \frac{3195.00}{20} = 159.75; \quad 157.25 = \frac{3145}{20} \leq \bar{x} \leq \frac{3245}{20} = 162.25$$

b.

$$h_1 + h_2 + h_3 = 0.5 \geq 0.5, \text{ d.h. } Me \in ]155, 160]$$

$$Me \approx 155 + \frac{0.5 - \frac{7}{20}}{\frac{3}{20}} \cdot 5 = 160$$

Etwa 50% der Schüler sind höchstens 160 cm groß und etwa 50% mindestens 160 cm.

c.

$$h_1 + h_2 = 0.30 \geq 0.25, \text{ d.h. } \tilde{x}_{0.25} \in ]150, 155]$$

$$\tilde{x}_{0.25} \approx 150 + \frac{0.25 - 0.15}{0.15} \cdot 5 = 153.33$$

Etwa 25% der Schüler sind höchstens 153.33 cm groß und etwa 75% mindestens 153.33 cm.

$$h_1 + h_2 + h_3 + h_4 = 0.75 \geq 0.75, \text{ d.h. } \tilde{x}_{0.75} \in ]160, 165] [160, 165]$$

$$\tilde{x}_{0.75} \approx 160 + \frac{0.75 - 0.50}{0.25} \cdot 5 = 165$$

Etwa 75% der Schüler sind höchstens 165 cm groß und etwa 25% mindestens 165 cm.

$$QA \approx 165.00 - 153.33 = 11.67$$

d.

$H_i$	$m_i$	$(m_i - 159.75)^2 \cdot H_i$
3	147.5	450.1875
3	152.5	157.6875
4	157.5	20.2500
5	162.5	37.8125
3	167.5	180.1875
1	172.5	162.5625
1	177.5	315.0625
20		1323.7500

$$s^2 \approx \frac{1323.75}{19} \approx 69.67, \quad s \approx 8.35$$

Damit liegen mindestens 50% der beobachteten Werte der Körpergröße im Intervall

$$[159.75 - 8.35, 159.75 + 8.35] = [151.40, 168.10]$$

Andererseits ist das arithmetische Mittel wegen

$$v = \frac{8.35}{195.75} \approx 0.04 < 0.5$$

repräsentativ.

#### 4. 3.

*Arbeitstabelle*

$g_i$	$G_i$	$H_i$	$h_i$	$\sum_{j=1}^i h_j$	$m_i$
0.0	0.50	7	0.28	0.28	0.25
0.5	1.00	5	0.2	0.48	0.75
1.0	2.00	7	0.28	0.76	1.50
2.0	3.00	3	0.12	0.88	2.50
3.0	5.00	2	0.08	0.96	4.00
5.0	7.00	1	0.04	1.00	6.00
		25	1.00		

1.

$$F(x) = \begin{cases} 0.00 & \text{für } -\infty < x \leq 0.25 \\ 0.28 & \text{für } 0.25 < x \leq 0.75 \\ 0.48 & \text{für } 0.75 < x \leq 1.50 \\ 0.76 & \text{für } 1.50 < x \leq 2.50 \\ 0.88 & \text{für } 2.50 < x \leq 4.00 \\ 0.96 & \text{für } 4.00 < x \leq 6.00 \\ 1.00 & \text{für } 6.00 < x < +\infty \end{cases}$$

$x$	$F(x)$
$]-\infty, 0.25]$	0.00
$]0.25, 0.75]$	0.28
$]0.75, 1.50]$	0.48
$]1.50, 2.50]$	0.76
$]2.50, 4.00]$	0.88
$]4.00, 6.00]$	0.96
$]6.00, \infty [$	1.00

$F(2.5) = 0.76$ , d.h. 76% der Kühlaggregate haben eine Lebensdauer von weniger als 2.5 Jahren.

$F(3.5) - F(1.0) = 0.88 - 0.48$ , d.h. 40% der Kühlaggregate haben eine Lebensdauer von mindestens 1 Jahr, aber weniger als 3.5 Jahren.

2.

Arbeitstabelle

$g_i$	$G_i$	$H_i$	$m_i$	$m_i \cdot H_i$	$g_i \cdot H_i$	$G_i \cdot H_i$
0.0	0.50	7	0.25	1.75	0.0	3.5
0.5	1.00	5	0.75	3.75	2.5	5.0
1.0	2.00	7	1.50	10.50	7.0	14.0
2.0	3.00	3	2.50	7.50	6.0	9.0
3.0	5.00	2	4.00	8.00	6.0	10.0
5.0	7.00	1	6.00	6.00	5.0	7.0
		25		37.50	26.5	48.5

$$\bar{x} \approx \frac{37.50}{25} = 1.5; \quad 1.06 = \frac{26.5}{25} \leq \bar{x} \leq \frac{48.5}{25} = 1.94$$

Der Modus existiert *nicht*.

$$h_1 + h_2 + h_3 = 0.76 \geq 0.50, \text{ d.h. } \tilde{x}_{0.5} \in [1.0, 2.0]$$

$$\tilde{x}_{0.5} \approx 1 + \frac{0.50 - 0.48}{0.28} \cdot 1 \approx 1.07$$

$$h_1 = 0.28 \geq 0.25, \text{ d.h. } \tilde{x}_{0.25} \in [0.0, 0.50]$$

$$\tilde{x}_{0.25} \approx 0 + \frac{0.20 - 0.00}{0.28} \cdot 0.5 \approx 0.45$$

$$h_1 + h_2 + h_3 = 0.76 \geq 0.75, \text{ d.h. } \tilde{x}_{0.75} \in [1.0, 2.0]$$

$$\tilde{x}_{0.75} \approx 1 + \frac{0.75 - 0.48}{0.28} \cdot 1 \approx 1.96$$

3.

Arbeitstabelle

$H_i$	$m_i$	$ m_i - 1.07  \cdot H_i$	$ m_i - 1.50  \cdot H_i$	$(m_i - 1.07)^2 \cdot H_i$	$(m_i - 1.50)^2 \cdot H_i$
7	0.25	5.74	8.8	4.7	10.9375
5	0.75	1.60	3.8	0.5	2.8125
7	1.50	3.01	0.0	1.3	0.0000
3	2.50	4.29	3.0	6.1	3.0000
2	4.00	5.86	5.0	17.2	12.5000
1	6.00	4.93	4.5	24.3	20.2500
25		25.43	25.0	54.1	49.5000

$$R \approx 7 - 0 = 7$$

$$QA \approx 1.96 - 0.45 = 1.51$$

$$d_{x_{0.5}}^- \approx \frac{25.43}{25} = 1.0172, \quad d_{\bar{x}}^- \approx \frac{25.00}{25} = 1$$

$$d_{x_{0.5}}^2 \approx \frac{54.1}{25} = 2.164, \quad s^2 \approx \frac{49.50}{25} = 2.0625, \quad s \approx 1.44,$$

$$v \approx \frac{1.44}{1.50} = 0.96$$

#### 4.4.

#### Arbeitstabelle

Abnehmer	Preis $x_i$	Absatz $H(a_i)$	Umsatz $x_i \cdot H(a_i)$	$ x_i - \bar{x}  \cdot H(a_i)$
A	6	70	420	80.50
B	8	30	240	25.50
C	9	30	270	55.50
Summen		130	930	161.50

a)

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_i x_i \cdot H(a_i) = \frac{930}{130} = 7.15 \text{ GE}$$

b)

$$d_{\bar{x}}^- = \frac{161.50}{130} = 1.24$$

Bedingt durch die unterschiedliche Anzahl von abgesetzten Stücken je Preisklasse streuen die Preise im Durchschnitt um 1.24 GE um das arithmetische Mittel.

#### 4.5.

$$v_1 := \frac{s_1}{\bar{x}_1} \cdot 100 = \frac{0.32}{7.82} \cdot 100 \approx 4.09 \%$$

$$v_2 := \frac{s_2}{\bar{x}_2} \cdot 100 = \frac{0.22}{78.24} \cdot 100 \approx 2.67\%$$

In dem ersten Unternehmen streuen die Löhne im Durchschnitt um 4.09% um das arithmetische Mittel, im zweiten Unternehmen um 2.67%; d.h., die Lohnstruktur ist im zweiten Unternehmen ausgeglichener.

**4. 6.**

(1)

a)

$g_i$	$G_i$	$H_i$	$m_i$	$m_i \cdot H_i$	$g_i \cdot H_i$	$G_i \cdot H_i$
0	10	4	5	20	0	40
10	20	3	15	45	30	60
20	30	6	25	150	120	180
30	40	8	35	280	240	320
40	50	2	45	90	80	100
Summe		23		585	470	700

$$\bar{x} \approx \frac{589}{23} = 25.43 \text{ Jahre}, \quad 20.43 = \frac{470}{23} \leq \bar{x} \leq \frac{700}{23} = 30.43$$

b)

$g_i$	$G_i$	$H_i$	$h_i$	$\sum_{j=1}^i h_j$
0	10	4	4/23	4/23
10	20	3	3/23	7/23
20	30	6	6/23	13/23
30	40	8	8/23	21/23
40	50	2	2/23	23/23
Summe		23	1	

$$Me \in [20,30[$$

$$Me \approx 20 + \frac{0.5 - \frac{7}{23}}{\frac{6}{23}} \cdot 10 = 27.5 \text{ Jahre}$$

c)

$$Mo \approx 30 + \frac{\frac{8}{23} - \frac{6}{23}}{2 \cdot \frac{8}{23} - \frac{6}{23} - \frac{2}{23}} \cdot 10 = 32.5 \text{ Jahre}$$



(2)

$H_i$	$m_i$	$ m_i - 25.43  \cdot H_i$	$(m_i - 25.43)^2 \cdot H_i$
4	5	81.72	1669.5396
3	15	31.29	326.3547
6	25	2.58	1.1094
8	35	76.56	732.6792
2	45	39.14	765.9698
Summen		231.29	3495.6527

a)

$$d_{\bar{x}} \approx \frac{231.29}{23} = 10.06$$

b)

$$s^2 \approx \frac{3495.6527}{22} = 158.8933; \quad s \approx 12.61$$

Mindestens 50 % der Schiffe sind mindestens  $25.43 - 12.61 = 12.82$  und höchstens  $25.43 + 12.61 = 37.14$  Jahre alt.

(3)

$$s = \frac{25.43 - 32.50}{12.61} = -0.56$$

Es handelt sich um eine rechtssteile Kurve.

**4. 8.**

*Arbeitstabelle*

$g_i$	$G_i$	$H_i$	$h_i$	$\sum_{j=1}^i h_j$	$b_i$	$l_i := \frac{h_i}{b_i}$	$m_i$	$m_i \cdot H_i$	$g_i \cdot H_i$	$G_i \cdot H_i$	$(m_i - \bar{x})^2 \cdot H_i$
0	10	32	0.256	0.256	10	0.026	5.0	160.0	0	320	30356.48
10	20	40	0.320	0.576	10	0.032	15.0	600.0	400	800	17305.60
20	45	25	0.200	0.776	25	0.008	32.5	812.5	500	1125	272.25
45	90	13	0.104	0.880	45	0.002	67.5	877.5	585	1170	13063.57
90	180	15	0.120	1.000	90	0.001	135.0	2025.0	1350	2700	147609.60
		125	1.000					4475	2835	6115	208607.50

1.

$$F(x) = \begin{cases} 0.000 & \text{when } -\infty < x \leq 5.0 \\ 0.256 & \text{when } 5.0 < x \leq 15.0 \\ 0.576 & \text{when } 15.0 < x \leq 32.5 \\ 0.776 & \text{when } 32.5 < x \leq 67.5 \\ 0.880 & \text{when } 67.5 < x \leq 135.0 \\ 1.000 & \text{when } 135.0 < x < +\infty \end{cases}$$

$$F(23) = 0.576.$$

Etwa 57.6 % der Wartezeit ist kürzer als 23 Minuten.

2.

$$\mu \approx \frac{4475}{125} \approx 35.8, \quad \frac{2836}{125} = 22.68 \leq \mu \leq 48.92 = \frac{6115}{125}$$

$$\sigma^2 \approx \frac{208607.5}{125} \approx 1668.86, \quad \sigma \approx 40.85, \\ \mu \in [35.8 - 40.85, 35.8 + 40.85] = [-5.05, 76.65].$$

Mindestens 50% der Wartezeit liegt im obigen Intervall.

*(Letzte Aktualisierung: 07.08.2017)*