N.6.1.
Die Simpsonsche Regel zur Näherung eines bestimmten Integrals

$$\int_a^b f(x)dx$$

lautet.

$$F_{Simpson} =$$
$$\frac{h}{3}(f(a)+4f(a+h)+2f(a+2h)+4f(a+3h)+$$
$$2f(a+4h)+...+2f(a+(2N-2)h)+4f(a+(2N-1)h)+f(b))$$

Dabei genügt die Schrittweite h der Formel

$$h=\frac{b-a}{2N}$$

mit einer natürlichen Zahl N.
Der Approximationsfehler wird abgeschätzt durch:

$$\left|\int_a^b f(x)dx - F_{Simpson}\right| \le \left|\frac{b-a}{180}h^4\right| \max_{x\in[a,b]}\left|f^{(4)}(x)\right|.$$

Am Beispiel des exakt lösbaren Integrals

$$\int_0^1 x^2 e^x dx$$

sollen Sie die Simpsonformal beurteilen:

(i) Berechnen Sie den exakten Wert des Integrals $\int_0^1 x^2 e^x dx$.

(ii) Berechnen Sie den Näherungswert für obiges Integral nach der Simpsonregel zu $N=4$. Rechnen Sie dabei mit der vollen Genauigkeit Ihres Taschenrechners. Geben Sie die Werte des Integranden in den Stützstellen in Form einer Tabelle an.

(iii) Berechnen Sie die obere Schranke für den Approximationsfehler nach der obigen Formel.

(iv) Vergleichen Sie den tatsächlichen Approximationsfehler

$$\left|\int_0^1 x^2 e^x dx - F_{Simpson}\right|$$

mit der oberen Schranke für den Fehler aus (iii).

N.6.2.
Berechnen Sie das Integral

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x dx$$

unter Ausnutzung der vollen Stellenzahl des Taschenrechners

a) exakt
b) über die SIMPSON-Formel

$$Q_h = \frac{h}{3}(f(a) + f(b) + 4\sum_{i=0}^{N-1} f(a + (2i+1)h) + 2\sum_{i=1}^{N-1} f(a + 2ih))$$

mit

$$h := \frac{b-a}{2N} = \frac{\pi}{12}$$

c) indem Sie $f(x)$ durch

$$P_2(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

approximieren.
Ermitteln Sie dazu die Koeffizienten aus den Bedingungen

$$P_2(0) = f(0)$$

$$P_2(\frac{\pi}{4}) = f(\frac{\pi}{4})$$

$$P_2(\frac{\pi}{2}) = f(\frac{\pi}{2})$$

und berechnen Sie dann

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} P_2(x) dx.$$

Diskutieren Sie Ihre Ergebnisse.

N.6.3.
Die Simpsonsche Regel zur Näherung eines bestimmten Integrals

$$\int_a^b f(x)dx$$

lautet.

$$F_{Simpson} = \frac{h}{3}(f(a) + 4f(a+h) + 2f(a+2h) + 4f(a+3h) + 2f(a+4h) + ... + 2f(a+(2N-2)h) + 4f(a+(2N-1)h) + f(b))$$

Dabei genügt die Schrittweite h der Formel

$$h = \frac{b-a}{2N}$$

mit einer natürlichen Zahl N.
Der Approximationsfehler wird abgeschätzt durch:

$$\left|\int_a^b f(x)dx - F_{Simpson}\right| \le \left|\frac{b-a}{180}h^4\right| \max_{x\in[a,b]}\left|f^{(4)}(x)\right|.$$

a) Nähern Sie das Integral

$$\int_{-3}^{-1} 2^x + 2 - (x+2)^2 \, dx$$

mit der Simpsonformal zu $N = 4$.
Geben Sie die Werte von f in den Stützstellen an.

b) Berechnen Sie die obere Schranke für den Approximationsfehler nach der obigen Formel.

c) Berechnen Sie das exakte Integral

$$\int_{-3}^{-1} 2^x + 2 - (x+2)^2 \, dx$$

und vergleichen Sie den tatsächlichen Approximationsfehler

$$\left|\int_a^b f(x)dx - F_{Simpson}\right|$$

mit der oberen Schranke für den Fehler aus b).

N.6.4.

Das Integral $\int_1^2 \ln(x)dx$ ist bis auf einen Fehler von höchstens $\varepsilon = 0.5 \cdot 10^{-5}$ zu bestimmen.
Hierzu ist die äquidistante zusammengesetzte Simpsonregel zu verwenden:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{6}\left(f(a) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(a+ih) + 4\sum_{i=0}^{n-1} f(a+ih+\frac{h}{2}) + f(b)\right) - \frac{b-a}{2880} h^4 f^{(iv)}(\eta)$$

$$\eta \in [a,b]$$

mit $\qquad h := \dfrac{b-a}{n}$

(i) Mittels der Fehlerdarstellung der äquidistant zusammengesetzten Simpsonregel bestimmen Sie eine ausreichend kleine Schrittweite h, um das Integral mit der geforderten Genauigkeit zu berechnen.

(ii) Berechnen Sie mit der äquidistant zusammengesetzten Simpsonregel und Schrittweite $h = 0.2$ einen Näherungswert für das Integral.
Führen Sie tabellarisch die Stellen auf, an denen Funktionswerte berechnet werden müssen, zusammen mit den entsprechenden Gewichten, mit denen die Funktionswerte in die Berechnung eingehen.

N.6.5.

Das Integral

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

mit $f(x) = e^{-x^2} dx$, $a = -0.5$ und $b = +0.5$ soll näherungsweise mit der äquidistant zusammengesetzten Simpsonregel :

$$SR = \frac{h}{6}\left(f(a) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(a+ih) + 4\sum_{i=0}^{n-1} f(a+ih+\frac{h}{2}) + f(b)\right)$$

$$h := \frac{b-a}{n}$$

berechnet werden.

(i) Mit der Fehlerdarstellung der äquidistant zusammengesetzten Simpsonregel

$$I - SR = -\frac{b-a}{2880} h^4 f^{(iv)}(\eta), \quad \eta \in (a,b)$$

unter Verwendung von

$$\max\{f^{(iv)}(\eta) | \eta \in (-0.5, +0.5)\} = 12 \quad \text{für} \quad f(x) = e^{-x^2}$$

bestimmen Sie eine ausreichend kleine Schrittweite h, um I näherungsweise bis auf einen Fehler von höchstens $\varepsilon = 0.00005$ zu berechnen.

(ii) Berechnen Sie einen Näherungswert für I mit der äquidistant zusammengesetzten Simpsonregel mit der Schrittweite $h = 0.25$ (also mit 4 Teilintervallen):

N.6.6.

Das Integral

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

mit $f(x) = e^{-x^2} dx$, $a = 0$ und $b = 1$ soll näherungsweise mit der äquidistant zusammengesetzten Trapezregel :

$$TR = \frac{h}{2}(f(a) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(a+ih) + f(b))$$

$$h := \frac{b-a}{n}$$

berechnet werden.

(iii) Mit der Fehlerdarstellung der äquidistant zusammengesetzten Trapezregel

$$I - TR = -\frac{b-a}{12} h^2 f''(\eta), \quad \eta \in (a,b)$$

unter Verwendung von

$$\max\{f''(\eta) | \eta \in (0,1)\} = 2 \quad \text{für} \quad f(x) = e^{-x^2}$$

bestimmen Sie eine ausreichend kleine Schrittweite h, um I näherungsweise bis auf einen Fehler von höchstens $\varepsilon = 0.005$ zu berechnen.

(iv) Berechnen Sie einen Näherungswert für I mit der äquidistant zusammengesetzten Trapezregel mit der Schrittweite $h = 0.125$ (also mit 8 Teilintervallen):