N.5.1.
Die transzendente Funktion

$$f(x) = \tan(x)$$

soll in dem Intervall $I = [1.1,\ 1.5]$ durch ein Polynom approximiert werden. Der Winkel $x \in R^1$ sei dabei im Bogenmaß gemessen. Zur numerischen Berechnung von $\tan(x)$ müssen Sie also Ihren Taschenrechner auf *Radiant* einstellen.

(i) Zeichnen Sie den Graphen von $\tan(x)$ in einer Umgebung von I auf Millimeterpapier. Geben Sie dazu in einer Tabelle einige Werte von $\tan(x)$ an.

(ii) Berechnen Sie das Interpolationspolynom

$$p(x) = a + bx + cx^2$$

vom Grade 2, das $\tan(x)$ in den Stützstellen 1.1, 1.3 und 1.5 interpoliert. Rechnen Sie dabei mit der vollen Stellenzahl Ihres Taschenrechners.

(iii) Berechnen Sie den Interpolationsfehler

$$|\tan(x) - p(x)|$$

an der Stelle $x = 1.4$. Warum ist der Interpolationsfehler so groß?

N.5.2.
Sei

$$f(x) = 2^x - 4x$$

aus der Aufgabe N.3.1. und

$$\begin{aligned} x_0 &= 0 \\ x_1 &= 1 \\ x_2 &= 2 \\ x_3 &= 3 \\ x_4 &= 4 \end{aligned}$$

fünf Stützstellen.

(i) Berechnen Sie das Polynom vierten Grades $p_4(x)$, welches f in den Punkten

$$\begin{aligned} &(x_0, f(x_0)) \\ &(x_1, f(x_1)) \\ &(x_2, f(x_2)) \\ &(x_3, f(x_3)) \\ &(x_4, f(x_4)) \end{aligned}$$

interpoliert.

Wenden Sie dazu die Newtonsche Interpolationsformel an:

$$p_4(x) = b_0 + b_1(x-x_0) + b_2(x-x_0)(x-x_1)$$
$$+ b_3(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) + b_4(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$$

Zur Berechnung der Koeffizienten b_i, $i = 0,1,2,3,4$, gehen Sie wie folgt vor:
Berechne Sie die rekursiv definierten sogenannten $k-$ ten dividierten Differenzen:

$$f[x_i] := f(x_i), \quad \text{für } k = 0$$

$$f[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}] := \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots, x_{i+k}] - f[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i}, \text{ für } k = 1,2,3,4$$

nach folgendem Rechenschema:

x_i	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$
x_0	$f[x_0]$				
		$f[x_0, x_1]$			
x_1	$f[x_1]$		$f[x_0, x_1, x_2]$		
		$f[x_1, x_2]$		$f[x_0, x_1, x_2, x_3]$	
x_2	$f[x_2]$		$f[x_1, x_2, x_3]$		$f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4]$
		$f[x_2, x_3]$		$f[x_1, x_2, x_3, x_4]$	
x_3	$f[x_3]$		$f[x_2, x_3, x_4]$		
		$f[x_3, x_4]$			
x_4	$f[x_4]$				

Für die Koeffizienten b_i gilt:

$$b_0 = f[x_0]$$
$$b_1 = f[x_0, x_1]$$
$$b_2 = f[x_0, x_1, x_2]$$
$$b_3 = f[x_1, x_2, x_3, x_4]$$
$$b_4 = f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4]$$

Sie stehen also in der oberen Schrägzeile des Rechenschemas.

(ii) Berechnen Sie zum Vergleich $p_4(\tilde{\xi})$, wobei $\tilde{\xi}$ der Näherungswert für die Nullstelle aus Aufgabe N.3.1. ist. Die Newtonsche Interpolationsformel legt es nahe, p_4 nach einem Hornerartigen Schema auszuwerten. Formen Sie also p_4 nach einem solchen Schema um, berechnen Sie $p_4(\tilde{\xi})$ und vergleichen Sie mit $f(\tilde{\xi})$ aus Aufgabe N.3.1.

N.5.3.

Es sei die Funktion $f(x) = \sin(\frac{\pi}{2}x)$ gegeben.

(i) Man bestimme das algebraische Interpolationspolynom $\varphi_4(x)$ zu f und den 5 Stützstellen

$$x_0 = 0, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = 3, \quad x_4 = 4$$

(ii) Man bestimme den Wert des Interpolationspolynoms an der Stelle $x = 1.5$, man ermittle also $\varphi_4(1.5)$.

(iii) Mittels der Restgliedformel der algebraischen Interpolation:

$$f(x) - \varphi_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\eta) \prod_{k=0}^{n} (x - x_k)$$

schätze man den absoluten Fehler zwischen $f(1.5)$ und $\varphi_4(1.5)$ nach oben ab.