N.3.1.
Die Funktion

$$f(x) = 2^x - 4x$$

hat im Intervall $[0,\ 5]$ zwei Nullstellen ξ_1, ξ_2.
Verschaffen Sie sich einen Überblick über den Funktionsverlauf und ermitteln Sie beide Nullstellen. Können Sie eine Nullstellen nicht exakt angeben, so berechnen Sie einen Näherungswert $\tilde{\xi}$ mit einem Iterationsverfahren (Empfehlung: Newton-Verfahren). Stellen Sie die Iterationsvorschrift auf und geben Sie alle Glieder der Iterationsfolge an. Berechnen Sie die Iteration dann ab, wenn für zwei nacheinanderfolgende Glieder x_n, x_{n+1} gilt: $|x_{n+1} - x_n| < 10^{-7}$. Berechnen Sie zur Kontrolle $f(\tilde{x})$.

N.3.2.
P und Q seien zwei Polynome in x und y:

$$P(x, y) = x^2 + (3 - 2y)x + 2 \qquad (1)$$
$$Q(x, y) = (2y + 1)x - (y^2 + y + 2) \qquad (2)$$

Bestimmen Sie alle reellen Lösungen des algebraischen Gleichungssystems

$$P(x, y) = 0 \qquad (3)$$
$$Q(x, y) = 0 \qquad (4)$$

(i) graphisch, indem Sie die Höhenlinien

$$\{(x, y) \in R^2 \mid P(x, y) = 0\}$$

von P und die Höhenlinien

$$\{(x, y) \in R^2 \mid Q(x, y) = 0\}$$

von Q im Bereich $x \in [-5,\ 4]$, $y \in [-4,\ 4]$ auf Millimeterpapier zeichnen.

(ii) numerisch, wobei Sie die Genauigkeit des Taschenrechners voll ausschöpfen.

Formen Sie dazu das eine der Gleichungen eine algebraische Gleichung vierten Grades in *einer* Variablen wird. Eine Lösung dieser Gleichung ist leicht aus der Zeichnung zu entnehmen oder auch durch Probieren zu finden.

Mit dem zugehörigen Linearfaktor soll nun die Gleichung um einen Grad reduziert werden. Hierzu empfiehlt sich der Einsatz des Hornerschemas, aber auch Polynomdivision ist möglich.

Die entstandene Gleichung dritten Grades ist mit dem Newton-Verfahren

$$z_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(z_n)}$$

näherungsweise zu lösen, wobei der Startwert in der Nähe der Lösung (siehe Zeichnung) liegen sollte.

Berechnen Sie mit diesem Ergebnis die andere Komponente der Lösung.

(iii) Dann und nur dann, wenn Ihnen die Lösung von (ii) auf die angegebene Weise nicht gelingt, lösen Sie die Gleichung

$$3x^3 + 14x^2 + 9x + 2 = 0$$

mit dem Newton-Verfahren. Sie erhalten einen Näherungswert für die $x-$ Koordinate einer Lösung des obigen algebraischen Gleichungssystems. Berechnen Sie aus (3) oder (4) die andere Komponenten der Lösung.

N.3.3.

Eine Kette hängt zwischen zwei $4m$ hohen Masten und berührt im halben Mastabstand $\frac{a}{2}$ den ebnen Erdboden.
Berechnen Sie $a[m]$ auf drei Nachkommastellen genau.

Kettenlinie:

$$f(x) = e^{\frac{x}{2}} + e^{\frac{-x}{2}} - 2$$

Zur Lösung der Aufgabe empfiehlt sich die Anfertigung einer Skizze.

N.3.4.

Bestimmen Sie die zwei Lösungen der Gleichung

$$x^2 - \ln x = 2$$

nach dem allgemeinen Iterationsverfahren (Banach).
Wählen Sie die jeweils geeignetesten Iterationsvorschriften ($M << 1$) aus, bevor Sie mit einer Iteration beginnen.
Die Iterationen sind mit $|x_k - x_{k-1}| < 5 \cdot 10^{-7}$ abzubrechen.
Schätzen Sie die Näherungslösung x_k mittels

$$|x_k - \xi| \leq \frac{M}{1-M} |x_k - x_{k-1}|$$

ab und geben Sie jeweils die Anzahl der sicheren Stellen nach dem Komma der Näherungslösungen an.

N.3.5.
Die Funktion

$$f(x) = 2^x + 2 - (x+2)^2$$

besitzt im Intervall $[-4, \ -2]$ eine Nullstelle a.

(i) Bestimmen Sie ein möglichst kleines Intervall $I_a = [a_1, \ a_2]$, so daß $a \in I_a$.

(ii) Entwickeln Sie aus der Gleichung

$$f(x) = 0$$

durch geeignete Umformungen (Auflösung nach x) solche Gleichungen

$$x = g_i(x), \quad i = 1, 2, ...$$

denen a genügt. Achten Sie dabei auf solche Gleichungen, in denen die Wurzelfunktion vorkommt.
Treten bei den Umformungen der Nullstellengleichung Einschränkungen für $x \in [-4, \ -2]$., so ist darauf hinzuweisen.

(iii) Stellen Sie fest, welche der in (ii) hergeleiteten Iterationsfunktionen $x = g_i, \quad i = 1, 2, ...$ den Bedingungen

$$\text{für alle} \quad x \in I_a \quad \text{gilt} \quad g_i(x) \in I_a$$
$$\text{und für alle} \quad x \in I_a \quad \text{gilt} \quad |g_i(x)| \le L < 1|$$

genügen.

(iv) Wählen Sie diejenige Iterationsfunktion aus, die auf I_a die kleinste Lipschitzkonstante L hat.

(v) Stellen Sie die entsprechende Iterationsvorschrift

$$x_{k+1} = g(x_k)$$

auf und wählen Sie einen Startwert $x_0 \in I_a$.

(vi) Berechnen Sie die Iterationsfolge $x_k, \ k = 1, 2, 3, ...$ .Die Iteration ist solange durchzuführen bis

$$|x_{k+1} - x_k| \le \varepsilon \, ,$$

wobei $\varepsilon = 0.5 \cdot 10^{-5}$

(vii) Führen Sie die a-posteriori-Abschätzung für den Approximationsfehler durch:

$$|x_{k+1} - a| \le \frac{L}{1-L} |x_{k+1} - x_k|$$

N.3.6.
Es ist die *positive* Nullstelle der Funktion

$$f(x) = e^x + e^{-x} - 4$$

gesucht.

a) Man zeige, daß $f(x)$ genau eine positive Nullstelle besitzt.
b) Mit einem geeigneten numerischen Verfahren bestimme man diese Nullstelle mit 6 Nachkommastellen Genauigkeit.
c) Man weise nach, daß die gefundene Näherung die geforderte Genauigkeit auf weist.