Teil II

Analysis in der Ökonomie

<u>D. 2. 1</u> (*Funktionen von n unabhängigen Variablen*)
Sei $n \in N$ und $D(f) \subseteq R^n$. Ist jedem Vektor (Punkt) $(x_1, x_2, ..., x_n) \in D(f)$ durch eine Vorschrift f eine reelle Zahl $z = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ zugeordnet, so heißt f *eine Funktion von n unabhängigen Variablen* $x_1, x_2, ..., x_n$ auf dem Definitionsbereich $D(f)$. Dabei heißt z *die abhängige Variable.*

Man schreibt

$$f: \quad D(f) \to R^1, \quad D(f) \subseteq R^n$$

oder

$$z = f(x) = f(x_1, x_2, ..., x_n), \qquad (x_1, x_2, ..., x_n) \in D(f), \quad D(f) \subseteq R^n, \quad z \in R^1.$$

<u>BS. 2. 1</u> (*Einige Beispiele*)
1. Eine Cobb-Douglas-Produktionsfunktion:

$$y(A, K) = 2 \cdot A^{0.4} \cdot K^{0.6}.$$

Hier sind:

A: Arbeitsinput,
K: Kapitalinput,
y: Output.

2. Eine Kostenfunktion:

$$K(r_1, r_2) = r_1 + 4r_2 + r_1 \cdot r_2.$$

Hier sind:

K: Faktorkosten,
r_1, r_2: Rohstoffmengen.

3. Eine Nutzenfunktion

$$N(x_1, x_2) = 128x_1 - 10x_2^2.$$

Hier sind:

N: Nutzen,
x_1, x_2: konsumierte Nahrungsmittelmengen.

B. 2. 1.
Die graphische Darstellung einer Funktion mehrerer Variablen ist nur im Fall $n = 2$ möglich. Bei $n > 2$ sind alle Untersuchungen auf die analytische Darstellung $z = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ oder auf eine tabellarische Erfassung angewiesen.

D. 2. 2. (***Graph einer Funktion***)
Bei einer Funktion

$$f: \quad D(f) \to R^1, \quad D(f) \in R^2$$

zweier Variablen x und y heißt die Punktmenge

$$\{(x, y, z) \in R^1 \mid z = f(x, y),\ (x, y) \in D(f)\}$$

der *Graph* von f.

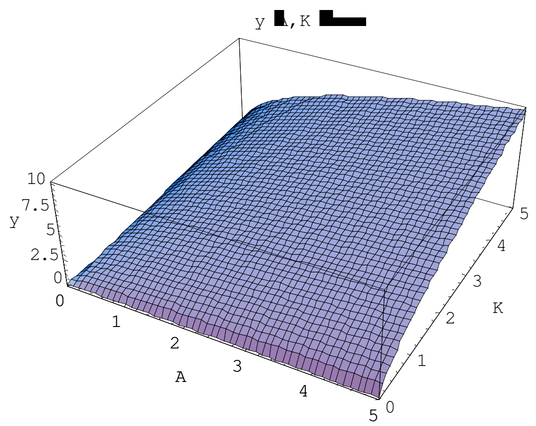
B. 2. 2.
Eine weitere Möglichkeit, eine Funktion $f(x, y)$ zweier Variablen graphisch zu veranschaulichen, ist die Darstellung mittels *Isohöhenlinien.*

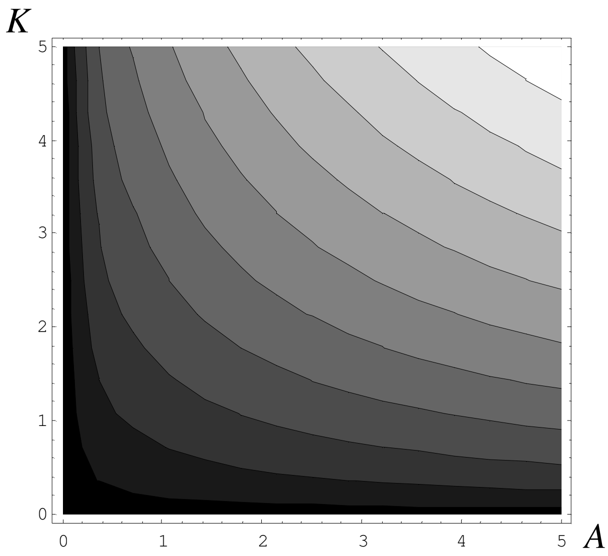
D. 2. 3 (***Isohöhenlinien***)
Ist $f: D(f) \to R^1, \quad D(f) \subseteq R^2$, eine Funktion zweier Variablen, so heißen die Punktmengen

$$M_c := \{(x, y)^T \in D(f) \mid f(x, y) = c\} \in R^2$$

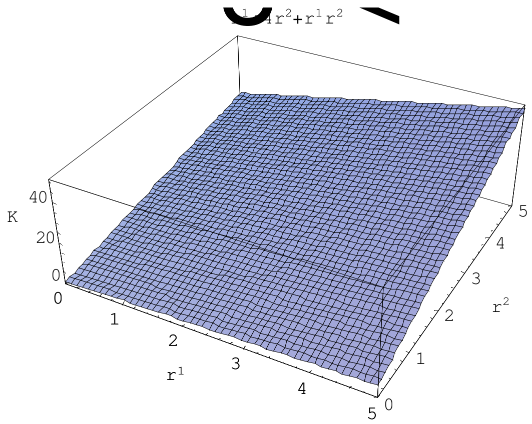
Isohöhenlinien von f (mit der Höhe $c \in R^1$).

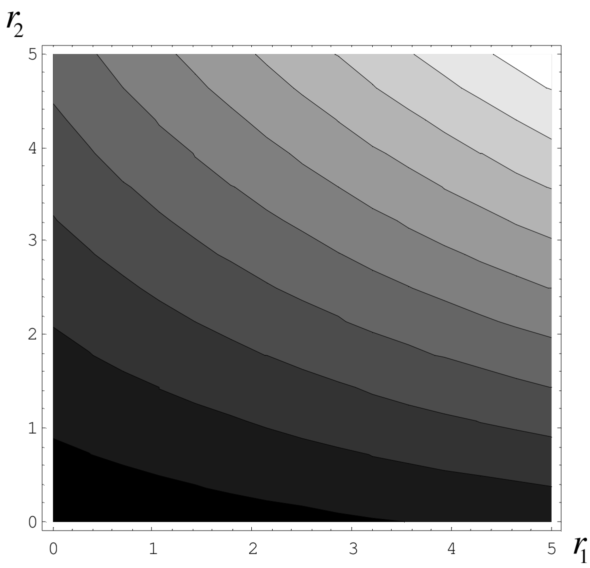
BS. 2. 1. (***Fortsetzung***)
Graph der Funktionen :
1. $y(A, K) = 2 \cdot A^{0.4} \cdot K^{0.6}$



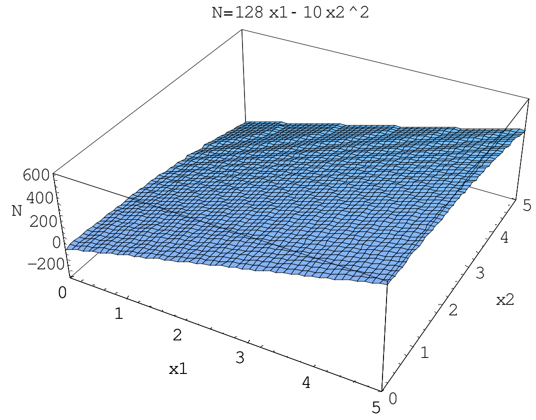


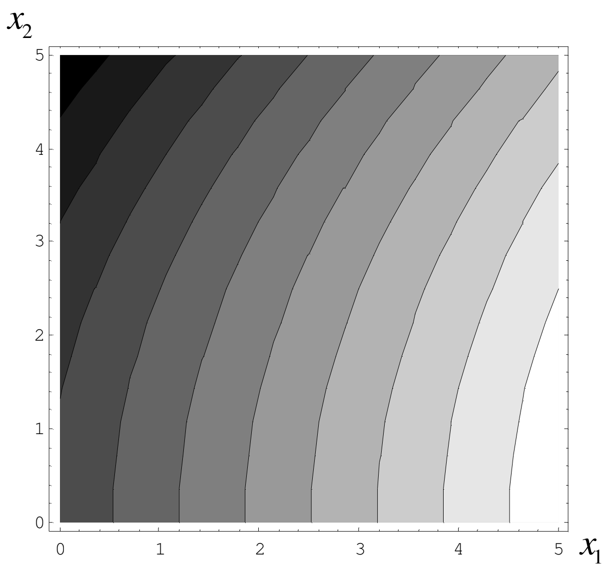
2. $K(r_1, r_2) = r_1 + 4r_2 + r_1 \cdot r_2$





3. $N(x_1, x_2) = 128x_1 - 10x_2^2$





<u>D. 2. 4.</u> (*Stetigkeit*)
Eine Funktion $f:\ D(f) \to R^1,\ D(f) \subseteq R^n$, heißt *an der Stelle* $x_0 \in D(f)$ *stetig*, falls zu jeder Umgebung $U_\varepsilon\left(f\left(x_0\right)\right) \subset R^1$ eine Umgebung $U_\delta\left(x^0\right) \subseteq D(f)$ existiert, so dass gilt:

$$\left\{z \in R^1 \mid z = f(x),\ x \in U_\delta(x^0)\right\} \subseteq U_\varepsilon(f(x^0))$$

<u>D. 2. 5</u> (*Grenzwert*)
Eine Funktion $f:\ D(f) \to R^1,\ D(f) \subseteq R^n$, hat an einer Stelle $x = \left(x_1, x_2, ..., x_n\right) \in D(f)$ den *Grenzwert* $a \in R^1$, wenn gilt

$$\lim_{\substack{y_1 \to x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n \to x_n}} f(y_1, ..., y_n) = a \,,$$

wobei $(x_1, x_2, ..., x_n) \in U_\varepsilon(x) \subseteq D(f)$ für ein geeignetes $\varepsilon > 0$ erfüllt sein muss.

B. 2. 3.
Der Grenzwert einer Funktion mehrerer Variablen kann bezüglich einer oder mehrerer Variablen gebildet werden. Will man bei der Grenzwertbildung z. B. nur die $i-$te Komponente $i \in \{1, 2, ..., n\}$ betrachten, so schreibt man

$$\lim_{y_i \to x_i} f(x_1, ..., x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, ..., x_n) \,.$$

Mann nennt dies den Grenzwert von f bezüglich x_i.

S. 2. 1.
Eine Funktion $f:\ D(f) \to R^1,\ D(f) \subseteq R^n$, ist an einer Stelle $x \in D(f)$ genau dann stetig, wenn f an der Stelle x einen Grenzwert $a \in R^1$ hat und darüber hinaus gilt:

$$a = \lim_{\substack{y_1 \to x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n \to x_n}} f(y_1, ..., y_n) = f(x_1, ..., x_n)$$

D. 2. 6 (***Partielle Ableitung***)
Sei $f:\ D(f) \to R^1,\ D(f) \subseteq R^n$. Existiert für ein $i \in \{1,\ 2, ...,\ n\}$ an einer festen Stelle $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \operatorname{int} D(f)$ der Grenzwert

$$\lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{f(x_1, ..., x_i + \Delta x_i, ..., x_n) - f(x_1, ..., x_n)}{\Delta x_i} \,,$$

so wird dieser Grenzwert *die partielle Ableitung von* f *an der Stelle* $(x_1, x_2, ..., x_n)$ genannt und mit

$$f_{x_i}(x_1, ..., x_n) = \left[\frac{\partial f}{\partial x_i} \right]_{(x_1, ..., x_n)}$$

bezeichnet. Man sagt, dass die Funktion f dann an der Stelle $(x_1, x_2, ..., x_n)$ *partiell differenzierbar nach* x_i ist.
Ist f nach jeder Stelle einer offenen Punktmenge $D \subseteq D(f)$ partiell nach x_i differenzierbar ist, so heißt f *partiell nach* x_i *differenzierbar über* D.

B. 2. 4.
Existiert der Grenzwert in D. 2. 6. an allen Stellen $x \in D(f)$, so ist f_{x_i} wieder eine Funktion von n unabhängigen Variablen auf $D(f)$. Sie wird *die partielle Ableitung von f nach x_i* genannt.

D. 2. 7. (*Differenzierbarkeit*)
Existieren für eine Funktion $f: D(f) \rightarrow R^1,\ D(f) \subseteq R^n$ alle partiellen Ableitungen $f_{x_i},\ i = 1, 2, ..., n$ auf einem Bereich $D \subseteq D(f)$ als stetige Funktionen, so heißt f auf D (*stetig*) *differenzierbar*. Im Falle $D = D(f)$ spricht man von *Differenzierbarkeit* der Funktion schlechthin.

S. 2. 2.
Die Funktionen $f: D(f) \rightarrow R^1,\ D(f) \subseteq R^n$ und $g: D(g) \rightarrow R^1,\ D(g) \subseteq R^n$ seien über $D \subseteq D(f) \cap D(g)$ partiell differenzierbar nach $x_i,\ i \in \{1,\ 2, ...,\ n\}$.

1. Die Funktion $h(x) = c \cdot f(x),\ c \in R^1$, ist über D partiell differenzierbar nach x_i, und es gilt:

$$h_{x_i}(x) = c \cdot f_{x_i}(x) \quad (\textit{Faktorregel}).$$

2. Die Funktion $h(x) = f(x) + g(x)$ ist über D partiell differenzierbar nach x_i, und es gilt:

$$h_{x_i}(x) = f_{x_i}(x) + g_{x_i}(x) \quad (\textit{Summenregel}).$$

3. Die Funktion $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ ist über D partiell differenzierbar nach x_i, und es gilt:

$$h_{x_i}(x) = f_{x_i}(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g_{x_i}(x) \quad (\textit{Produktregel}).$$

4. Die Funktion $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ ist über D partiell differenzierbar nach x_i, falls $g(x) \neq 0$ für alle $x \in D$ und es gilt:

$$h_{x_i}(x) = f_{x_i}(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g_{x_i}(x) \quad (\textit{Produktregel}).$$

$$h_{x_i}(x) = \frac{f_{x_i}(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g_{x_i}(x)}{[g(x)]^2} \quad (\textit{Quotientenregel}).$$

BS. 2. 2.
Gegeben sei die Produktionsfunktion

$$y(A, K) = 2 \cdot A^{0.2} \cdot K^{0.8}.$$

mit

A: Arbeitsinput,
K: Kapitalinput,

y: Output.

Berechnen und interpretieren Sie, ausgehend von der Faktorkombination $A = 20,\ K = 10,$ die 1. partiellen Ableitungen von $y(A, K)$.

Lösung:

$$y_A(A, K) = 0.4 \cdot A^{-0.8} \cdot K^{0.8}, \qquad y_A(20,\ 10) = 0.229739671 \approx 0.230,$$

d.h. erhöht sich *nur* der Arbeitsinput von 20 auf 21 Einheiten, so erhöht sich der Output um etwa 0.230 Einheiten. Zum Vergleich berechnen wir den exakten Zuwachs des Outputs:

$$y(21,\ 10) - y(20,\ 10) = 23.19924517 - 22.9739671 = 0.225278072 \approx 0.225$$

$$y_K(A, K) = 1.6 \cdot A^{0.2} \cdot K^{-0.2}, \qquad y_K(20,\ 10) = 1.837917368 \approx 1.84,$$

d.h. erhöht sich *nur* der Kapitalinput von 10 auf 11 Einheiten, so erhöht sich der Output um etwa 1.84 Einheiten. Zum Vergleich berechnen wir den exakten Zuwachs des Outputs:

$$y(20,\ 11) - y(20,\ 10) = 24.79420245 - 22.9739671 = 1.82023535 \approx 1.82.$$

(Die ersten partiellen Ableitungen einer Produktionsfunktion heißen auch *Grenzertragsfunktionen.*)

D. 2. 8. (***Gradient***)
Ist eine Funktion $f:\ D(f) \to R^1,\ D(f) \subseteq R^n$ an einer Stelle $x^0 \in D(f)$ partiell differenzierbar, so heißt der Vektor

$$\nabla f\left(x^0\right) = gradf\left(x^0\right) = \left(f_{x_1}, \ldots, f_{x_n}\right)$$

der *Gradient* von f an der Stelle x^0.

BS. 2. 2. (***Fortsetzung***)
Bestimmen Sie den Gradientenvektor der Funktion

$$y(A, K) = 2 \cdot A^{0.2} \cdot K^{0.8}$$

im Punkt $(20,\ 10)$.

Lösung:

$$\nabla y\left(A, K\right)^T = \left(0.4 \cdot A^{-0.8} \cdot K^{0.8},\ 1.6 \cdot A^{0.2} \cdot K^{-0.2}\right)^T$$
$$\nabla y\left(20,\ 10\right)^T = \left(0.229739671,\ 1.837917368\right)^T \approx \left(0.23,\ 1.84\right)^T.$$

B. 2. 5.
Der Gradient einer Funktion an einer Stelle x^0 weist „in Richtung des steilsten Anstiegs" (des Graphen) der Funktion.

D. 2. 9. (***Partielles Differential***)
Sei $f:\ D(f) \to R^1,\ D(f) \subseteq R^n$, eine differenzierbare Funktion, $x^0 \in D(f)$ und $\Delta x_i \in R^1$.
Dann heißt die reelle Zahl

$$df_{x_i} := f_{x_i}(x^0) \cdot \Delta x_i$$

das *partielle Differential* von f bezüglich x_i an der Stelle $x^0,\ i \in \{1,\ 2, \ldots, n\}$.

B. 2. 6.
Das partielle Differential bezüglich x_i ist eine Näherung an den Zuwachs der Funktion, den man erhält, wenn man die Komponente x_i um Δx_i verändert.

BS. 2. 2. (***Fortsetzung***)
Wie ändert sich der Output

a) näherungsweise
b) exakt,

wenn

1. der Arbeitsinput um 0.3 vermindert wird
2. der Kapitalinput um 0.1 Einheiten erhöht wird?

Lösung:
1.
a) $dy_A = y_A(20,10) \cdot (-0.3) = 0.229739671 \cdot (-0.3) = -0.068921901 \approx -0.0689$
b) $y(19.7,\ 10) - y(20,\ 10) = 22.90462791 - 22.9739671 = -0.06933919 \approx -0.0693$

2.

a) $dy_K = y_K(20,10) \cdot 0.1 = 1.837917368 \cdot 0.1 = 0.183791737 \approx 0.1837$,
b) $y(20,\ 10.1) - y(20,\ 10) = 23.15757578 - 22.9739671 = 0.1836$.

D. 2. 10. (***Totales Differential***)
Sei $f:\ D(f) \to R^1,\ D(f) \subseteq R^n$, eine differenzierbare Funktion, $x^0 \in D(f)$ und $\Delta x_i \in R^1,\ i = 1,\ 2, \ldots, n$. Dann heißt die reelle Zahl

$$df := \sum_{i=1}^{n} f_{x_i}(x^0) \cdot \Delta x_i$$

das totale Differential von f an der Stelle x^0.

<u>B. 2. 7.</u>
Analog den partiellen Differentialen beschreibt das totale Differential an einer Stelle $x = (x_1,\ x_2,...,x_n)$ die näherungsweise Änderung des Funktionswertes bei Veränderung der Komponenten x_i um $\Delta x_i,\ i = 1,\ 2,...,n$.
Das totale Differential df hängt ähnlich wie die partiellen Differentiale von der Stelle x^0. und den Änderungen $\Delta x_i,\ i = 1,\ 2,...,n$, ab.
Zur Bestimmung von Näherungswerten für einen Funktionswert einer Stelle $x = (x_1 + \Delta x_1,\ x_2 + \Delta x_2,...,x_n + \Delta x_n)$ in der Nähe von $x = (x_1,\ x_2,...,x_n)$ dient die *Näherungsformel*

$$f\left(x_1 + \Delta x_1,\ x_2 + \Delta x_2,...,x_n + \Delta x_n\right) \approx f\left(x_1,\ x_2,...,x_n\right) + df\ .$$

Je kleiner die Änderungen $\Delta x_i,\ i = 1,\ 2,...,n$, sind, umso kleiner ist der absolute Fehler, den der Näherungswert gegenüber dem exakten Funktionswert hervorruft.

<u>BS. 2. 2.</u> (*Fortsetzung*)
Wie ändert sich der Output

a) näherungsweise
b) exakt,

wenn *gleichzeitig* der Arbeitsinput um 0.3 vermindert und der Kapitalinput um 0.1 Einheiten erhöht wird?

Lösung:

a) $dy = y_A \cdot dA + y_K.dK = -0.068921901 + 0.183791737 = 0.114869836 \approx 0.115$,

b) $\Delta y = y(19.7,\ 10.1) - y(20,\ 10) = 23.08768242 - 22.9739671 = 0.11371532 \approx 0.114$

<u>D. 2. 11</u> (*Partielle Ableitung 2. Ordnung*)
Sei $f:\ D(f) \to R^1,\ D(f) \subseteq R^n$, eine auf $D(f)$ differenzierbare Funktion der n unabhängigen Variablen $x_1,...,x_n$ und bezeichne $f_{x_i}(x_1,...,x_n)$ die Ableitungsfunktion von f nach x_i .
Existiert die partielle Ableitung der Ableitungsfunktion $f_{x_i}(x_1,...,x_n)$ nach der Variablen $x_j,\ j \in \{1,...,n\}$, an der Stelle $x = (x_1,...,x_n)$, so heißt sie *die partielle Ableitung 2. Ordnung von* f *nach* x_i *und* x_j *an der Stelle* x . Man schreibt:

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right|_{(x_1,...,x_n)} = f_{x_i x_j}\left(x_1,...,x_n\right).$$

Falls $f_{x_i x_j}$ auf dem ganzem Definitionsbereich existiert, so wird $f_{x_i x_j}$ *partielle Ableitung 2. Ordnung nach* x_i *und* x_j *von* f *genannt.*

B. 2. 8.
Eine zweimal partiell differenzierbare Funktion von n Variablen hat also n^2 partielle Ableitungen 2. Ordnung. Für genügend oft differenzierbare Funktionen können sukzessiv partielle Ableitungen beliebig hoher Ordnung definiert werden. Bei n Variablen hat man n^r partielle Ableitung r-ter Ordnung.

S. 2. 3.
Sind die partiellen Ableitungen 2. Ordnung einer Funktion $f: \; D(f) \to R^1, \; D(f) \subseteq R^n$, stetige Funktionen, so gilt

$$f_{x_i x_j} = f_{x_j x_i}$$

B. 2. 9.
1. Mann nennt $f_{x_i x_j}$ auch die *gemischten partiellen Ableitungen 2. Ordnung*, falls $i \neq j$.
   Im Falle $i = j$ schreibt man anstelle von $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i}$ meist $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$.
2. Die partiellen Ableitungen 2. Ordnung fasst man auch in der sog. *Hessesche Matrix* zusammen:

$$H\big|_x := \begin{pmatrix} f_{x_1^2} & . & . & . & f_{x_1 x_n} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ f_{x_n x_1} & . & . & . & f_{x_n^2} \end{pmatrix}.$$

D. 2. 12. (***Partielle Elastizität***)
Sei $f: \; D(f) \to R^1, \; D(f) \subseteq R^n$, eine auf $D(f)$ differenzierbare Funktion der n unabhängigen Variablen $x_1, \ldots, x_n$.
Als *partielle Elastizität von f* bezüglich x_i bezeichnet man

$$\varepsilon_{f,x_i}(x_1, x_2, \ldots, x_n) := \frac{x_i}{f(x_1, x_2, \ldots, x_n)} \cdot f_{x_i}, \qquad i = 1, \; 2, \ldots, n.$$

B. 2. 10.
Der Zahlenwert der partiellen Elastizität ε_{f,x_i} gibt an, um wie viel Prozent sich der Funktionswert $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ näherungsweise ändert, wenn sich die Variable x_i um ein Prozent ändert und die übrigen Variablen konstant bleiben.

BS. 2. 2. (***Fortsetzung***)
Bestimmen und interpretieren Sie die partiellen Elastizitäten der Produktionsfunktion

$$y(A, K) = 2 \cdot A^{0.2} \cdot K^{0.8}$$

im Punkt $(20,\ 10)$.

Lösung:

$$\varepsilon_{y,A}(A,K) = \frac{A}{y(A,K)} \cdot y_A$$
$$= \frac{A}{2 \cdot A^{0.2} \cdot K^{0.8}} \cdot 0.4 \cdot A^{-0.8} \cdot K^{0.8} = 0.2$$

Erhöht man die Arbeitskräfte um 1% (*egal von welchem Niveau aus*), so erhöht sich die Produktion um etwa 0.2 Prozent.

$$\varepsilon_{y,K}(A,K) = \frac{K}{y(A,K)} \cdot y_K$$
$$= \frac{K}{2 \cdot A^{0.2} \cdot K^{0.8}} \cdot 1.6 \cdot A^{0.2} \cdot K^{-0.2} = 0.8$$

Erhöht man das Kapital um 1% (*egal von welchem Niveau aus*), so erhöht sich die Produktion um etwa 0.8 Prozent.
Damit erhalten die Exponenten in der Cobb-Douglas-Funktion einen ökonomischen Inhalt.

D. 2. 13 (*Implizite und explizite Funktionen*)
Sei $f:\ D(f) \to R^2$ eine Funktion der Variablen x und y. Eine Funktion $y = g(x),\ x \in D(g) \subseteq R^1$, die in der Form

$$f(x,y) = f(x, g(x)) = 0$$

vorliegt, heißt *implizit*. Liegt g in der Form $y = g(x)$ vor, dann heißt g *explizit*.

B. 2. 11.
Jede explizit gegebene Funktion $y = g(x)$ kann als implizite Funktion $f(x,y) = y - g(x) = 0$ geschrieben werden. Dagegen kann eine nur explizit gegebene Funktion nicht auf eine explizite Form gebracht werden. Der Graph der Funktion g entspricht der Isohöhenlinie von f mit der Höhe $c = 0$.

S. 2. 4.
Sei $f:\ D(f) \to R^1,\ D(f) \subseteq R^2$ eine auf $D(f)$ differenzierbare Funktion. Sei die Funktion, durch die Gleichung $f(x,y) = 0$ implizit gegeben.
Dann gilt für alle Stellen $(x,y)^T \in D(f)$ mit $f_y(x,y) \neq 0$:

$$g'(x) = -\frac{f_x(x,y)}{f_y(x,y)}.$$

Ist $x = h(y)$ die zu $y = g(x)$ gehörende Umkehrfunktion, dann gilt für alle Stellen $(x,y)^T \in D(f)$ mit $f_x(x,y) \neq 0$:

$$h'(x) = -\frac{f_y(x,y)}{f_x(x,y)}.$$

<u>D. 2. 14.</u> (*Homogenität, Homogenitätsgrad*)
Eine Funktion f heißt *homogen vom Grade r*, wenn für alle $x \in D(f)$ und alle $\lambda \in R^1$, $\lambda > 0$ gilt:

$$\lambda \cdot x \in D(f) \text{ und } f(\lambda \cdot x) = \lambda^r \cdot f(x).$$

Dabei heißt $r \in R^1$ der *Homogenitätsgrad von f*.

<u>BS. 2. 3.</u>
Die Produktionsfunktion eines Unternehmens für die Herstellung einer Ware aus den Produktionsfaktoren Arbeitskraft A und Kapital K lautet:

$$y(A,K) = 2A^3 + K^3 + 0.5A^2K$$

Es gilt

$$y(\lambda \cdot A, \lambda \cdot K) = 2 \cdot (\lambda A)^3 + (\lambda K)^3 + 0.5 \cdot (\lambda A)^2 \cdot (\lambda K)$$

$$= \lambda^3 \cdot y(A,K).$$

Man sieht, dass bei Vervielfachung der unabhängigen Variablen x und y um den gleichen Faktor λ die Produktion $y(A,K)$ auf das λ^3-fache steigt. Der Homogenitätsgrad der Funktion ist also gleich 3.

<u>B. 2. 12.</u>
Der Homogenitätsgrad kann jeden beliebigen reellen Wert annehmen. Im eindimensionalen Fall sind die Potenzfunktionen

$$f(x) = ax^r, \quad a \in R^1,\ a \neq 0,$$

homogene Funktionen von Grade r.

<u>S. 2. 5.</u>
Die Funktion $f:\ D(f) \to R^1,\ D(f) \subseteq R^n$ sei homogen vom Grade r. Dann gilt die *Eulersche Formel*:

$$r \cdot f(x_1,...,x_n) = \sum_{i=1}^{n} f_{x_i}(x_1,...,x_n) \cdot x_i.$$

Gilt umgekehrt die obige Beziehung für eine Funktion f an allen Stellen ihres Definitionsbereiches, so ist f homogen von Grade r.

BS. 2. 3. (***Fortsetzung***)
Für die Funktion

$$y(A,K) = 2A^3 + K^3 + 0.5A^2K$$

gilt:

$$y_A(A,K)\cdot A = 6A^3 + A^2\cdot K, \qquad y_K(A,K) = 3A^3 + 0.5A^2\cdot K.$$

Die Addition beider Gleichungen ergibt

$$y_A(A,K)\cdot A + y_K(A,K) = 6A^3 + 3K^3 + 1.5A^2K = 3\cdot y\left(A,K\right).$$

D. 2. 15. (***Konvexität, Konkavität***)
Der Definitionsbereich $D(f)\subseteq R^n$ einer reellwertigen Funktion f sei eine konvexe Punktmenge.
Dann heißt die Funktion f

1. *konvex*, falls für alle Stellen $x^1, x^2 \in D(f)$ und für alle $\lambda \in [0,\ 1]$ gilt:

$$f\left(\lambda\cdot x^1 + (1-\lambda)\cdot x^2\right) \le \lambda\cdot f\left(x^1\right) + (1-\lambda)\cdot f\left(x^2\right),$$

2. *konkav*, falls für alle Stellen $x^1, x^2 \in D(f)$ und für alle $\lambda \in [0,\ 1]$ gilt:

$$f\left(\lambda\cdot x^1 + (1-\lambda)\cdot x^2\right) \ge \lambda\cdot f\left(x^1\right) + (1-\lambda)\cdot f\left(x^2\right),$$

3. *streng konvex* bzw. *streng konkav*, falls für alle Stellen, $x^1, x^2 \in D(f)$, $x^1 \ne x^2$ und für alle $\lambda \in \,]0,\ 1[$ gilt:

$$f\left(\lambda\cdot x^1 + (1-\lambda)\cdot x^2\right) < \lambda\cdot f\left(x^1\right) + (1-\lambda)\cdot f\left(x^2\right)$$

bzw.

$$f\left(\lambda\cdot x^1 + (1-\lambda)\cdot x^2\right) > \lambda\cdot f\left(x^1\right) + (1-\lambda)\cdot f\left(x^2\right).$$

B. 2. 13.

1. Ist eine Funktion f konvex (bzw. konkav), so ist die Funktion $(-f)$ konkav (bzw. konvex).
2. Die Konvexität bzw. Konkavität einer Funktion f lässt sich auch auf (konvexen) Teilmengen von $D(f)$ erklären, speziell auf Intervallen $[a,\ b]\subseteq D(f)$ oder $\varepsilon-$Umgebungen $U_\varepsilon(x^0)\subseteq D(f)$.
3. Der Definitionsbereich $D(f)$ einer konvexen oder konkaven Funktion muss konvex sein. Andernfalls könnte trotz $x^1, x^2 \in D(f)$ gelten $\left(\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2\right) \notin D(f)$, wodurch $f\left(\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2\right)$ nicht erklärt ist.
4. Eine Untersuchung auf Konvexität (Konkavität) einer Funktion mithilfe der Definition D. 2. 15. ist oft sehr aufwendig und schwierig. Daher benutzt man andere Kriterien.

<u>D. 2. 16.</u> (*Quadratische Form)*
Sei $A := (a_{ij}),\ i,\ j = 1,\ 2, ..., n,$ eine symmetrische Matrix und $x \in R^n$. Dann nennt man den Ausdruck

$$Q = x^T Ax$$

bzw.

$$Q = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$$

quadratische Form.

<u>D. 2. 17.</u> (*Definitheit)*
Eine quadratische Form heißt

1. *positiv* (*negativ*) *definit*, wenn für alle $x \neq 0, x \in R^n$, die Form Q positiv (negativ) ist.
2. *positiv* (*negativ*) *semidefinit* genau dann, wenn alle Eigenwerte von A nichtnegativ (nichtpositiv) sind.
3. *indefinit* genau dann, wenn A positive und negative Eigenwerte hat.

<u>S. 2. 6.</u>
1. Eine quadratische Form ist positiv definit genau dann, wenn für die folgenden Unterdeterminanten von A gilt:

$$\det a_1 > 0, \quad \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} > 0, \quad \det\begin{pmatrix} a_{11} & . & . & . & a_{1n} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ a_{n1} & . & . & . & a_{nn} \end{pmatrix} > 0 .$$

2. Eine quadratische Form ist negativ definit, wenn für die folgenden Unterdeterminanten gilt:

$$\det a_1 > 0, \quad \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} < 0, \ ..., \ (-1)^n \det\begin{pmatrix} a_{11} & . & . & . & a_{1n} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ a_{n1} & . & . & . & a_{nn} \end{pmatrix} > 0 .$$

<u>BS. 2. 4.</u>
Untersuchen Sie folgende Matrix auf Definitheit.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Lösung:

$$\det 1 = 1 > 0, \quad \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 1 > 0, \quad \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = 5 > 0 .$$

Also ist A positiv definit.

<u>S. 2. 7.</u>
Hat eine Funktion $f:\ D(f) \to R^1$ stetige partielle Ableitungen 2. Ordnung auf dem konvexen und offenen Definitionsbereich $D(f) \subseteq R^n$, so gilt:

1. f ist genau dann konvex, wenn die Hesse-Matrix

$$H(x) := \begin{pmatrix} f_{x_1x_1} & f_{x_1x_2} & . & . & . & f_{x_1x_n} \\ f_{x_2x_1} & f_{x_2x_1} & . & . & . & f_{x_2x_n} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ f_{x_nx_1} & f_{x_nx_2} & . & . & . & f_{x_nx_n} \end{pmatrix}$$

   von f für alle $x \in D(f)$ positiv semidefinit ist.

2. f ist genau dann konkav, wenn die Hesse-Matrix von f für alle $x \in D(f)$ negativsemidefinit ist.

<u>S. 2. 8.</u>
Hat eine Funktion stetige partielle Ableitungen 2. Ordnung auf dem konvexen und offenen Definitionsbereich $D(f) \subseteq R^n$, so gilt:
Die Funktion f ist streng konvex, wenn die Hesse-Matrix für alle $x \in D(f)$ positiv definit ist, und f ist streng konkav, wenn die Hesse-Matrix für alle $x \in D(f)$ negativ definit ist.

<u>B. 2. 14.</u>
Für den fall $n = 2$ gibt es eine zur Semidefinitheit äquivalente Aussage, die dann zu den folgenden Kriterien für Konvexität und Konkavität einer zweimal stetig differenzierbaren Funktion zweier Variablen führt:

<u>S. 2. 9.</u>
Eine Funktion f <u>zweier</u> unabhängiger Variablen sei auf einem konvexen und offenen Definitionsbereich $D(f)$ erklärt und habe auf dem Definitionsbereich stetige partielle Ableitungen 2. Ordnung. Dann gilt:

1. f ist genau dann konvex, wenn gilt:

$$f_{xx} \geq 0, \quad f_{yy} \geq 0, \quad f_{xx} \cdot f_{yy} \geq \left(f_{xy}\right)^2, \quad \forall \left(x, y\right)^T \in D(f) .$$

2. f ist genau dann konkav, wenn gilt:

$$f_{xx} \le 0, \quad f_{yy} \le 0, \quad f_{xx} \cdot f_{yy} \ge \left(f_{xy}\right)^2, \quad \forall \left(x, y\right)^T \in D(f).$$

B. 2. 15.
Gilt in Satz S.2.9. das Kriterium 1. bzw. 2., so folgt aus $f_{xx} \ge 0$ sofort $f_{yy} \ge 0$ bzw. aus $f_{xx} \le 0$ auch $f_{yy} \le 0$ und umgekehrt. Es reicht also entweder f_{xx} oder f_{yy} zu untersuchen.

D. 2. 18. (***Das Differential 2. Ordnung***)
Sei die Funktion f auf $D(f) \subseteq R^n$ definiert und habe stetige, partielle Ableitungen zweiter Ordnung. Sei $x \in D(f)$ und seien $\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n$ reelle Zahlen.
Dann ist das *Differential 2. Ordnung an der Stelle x* erklärt durch:

$$d^2 f(x) := \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j} \cdot \Delta x_i \cdot \Delta x_j .$$

D. 2. 19. (***Relative und absolute Extrema***)
1. Man sagt, dass eine Funktion $f: D(f) \to R^1,\ D(f) \subseteq R^n$, an der Stelle $x^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0) \in D(f)$ ein *globales* (*absolutes*) *Maximum* bzw. *Minimum* hat, falls gilt:

$$f(x^0) \ge f(x), \quad \forall x \in D(f)$$

bzw.

$$f(x^0) \le f(x), \quad \forall x \in D(f).$$

Man spricht von einem *strikten globalen* (*absoluten*) *Maximum* bzw. *Minimum*, falls gilt:

$$f(x^0) > f(x), \quad \forall x \in D(f), \quad x \ne x^0$$

bzw.

$$f(x^0) < f(x), \quad \forall x \in D(f), \quad x \ne x^0 .$$

2. Man sagt, dass eine Funktion $f: D(f) \to R^1,\ D(f) \subseteq R^n$, an der Stelle $x^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0) \in D(f)$ ein *lokales* (*relatives*) *Maximum* bzw. *Minimum* hat, falls gilt:

$$f(x^0) \ge f(x), \quad \forall x \in D(f) \cap U_\varepsilon(x^0)$$

bzw.

$$f(x^0) \le f(x), \quad \forall x \in D(f) \cap U_\varepsilon(x^0).$$

Man spricht von einem *strikten lokales* (*relatives*) *Maximum* bzw. *Minimum*, falls gilt:

$$f(x^0) > f(x), \quad \forall x \in D(f) \cap U_\varepsilon(x^0), \quad x \ne x^0$$

bzw.

$$f(x^0) < f(x), \quad \forall x \in D(f) \cap U_\varepsilon(x^0), \quad x \ne x^0 .$$

B. 2. 16.
Der Oberbegriff für Minima and Maxima ist *Extrema.*

D. 2. 20. (***Kritische Stelle***)
Sei $f:\ D(f) \to R^1$ mit $y = f(x_1,...,x_n),\ D(f) \subseteq R^n$, an der Stelle $x^0 = (x_1^0,...,x_n^0) \in \operatorname{int} D(f)$ eine nach allen ihren Variablen partiell differenzierbare Funktion. Der Punkt x^0 heißt eine *kritische Stellet* von f, falls gilt

$$f_{x_i}(x_1^0,...x_n^0) = 0, \quad i = 1,\ 2,...,n.$$

S. 2. 10.
Sei $f:\ D(f) \to R^1$ eine an der Stelle $x^0 = (x_1^0,...,x_n^0) \in \operatorname{int} D(f)$ nach allen ihren Variablen partiell differenzierbare Funktion.
Wenn f in $(x_1^0,...,x_n^0)$ ein relatives Extremum besitzt, dann ist $(x_1^0,...,x_n^0)$ eine kritische Stelle von f.

S. 2. 11.
Sei $x^0 = (x_1^0,...,x_n^0)$ eine kritische Stelle der Funktion $f:\ D(f) \to R^1$. Ist f in einer Umgebung $U_\varepsilon(x^0)$ streng konvex bzw. streng konkav, so besitzt f an der Stelle x^0 ein striktes Minimum bzw. ein striktes Maximum.

S. 2. 12.
Die Funktion $f:\ D(f) \to R^1$ besitze stetige Ableitungen zweiter Ordnung an der Stelle $x^0 = (x_1^0,...,x_n^0) \in \operatorname{int} D(f)$ und x^0 sei eine kritische Stelle von f. Ist die Hesse-Matrix an der Stelle x^0

1. negativ definit, so besitzt f an der Stelle x^0 ein striktes lokales Maximum,
2. positiv definit, so besitzt f an der Stelle x^0 ein striktes lokales Minimum.

S. 2. 13.
Eine Funktion $f:\ D(f) \to R^1,\ D(f) \subseteq R^2$ besitze stetige partielle Ableitungen zweiter Ordnung an der Stelle $x^0 = (x_1^0, x_2^0) \in \operatorname{int} D(f)$.
Ist $x^0 = (x_1^0, x_2^0)$ eine kritische Stelle von f und gilt

$$f_{x_1x_1}(x_1^0, x_2^0) \cdot f_{x_2x_2}(x_1^0, x_2^0) > \left(f_{x_1x_2}(x_1^0, x_2^0)\right)^2$$

sowie

1. $f_{x_1x_1}(x_1^0, x_2^0) > 0$ (und damit auch $f_{x_2x_2}(x_1^0, x_2^0) > 0$), so besitzt f an der Stelle (x_1^0, x_2^0) ein striktes lokales Minimum bzw.

2. $f_{x_1x_1}(x_1^0, x_2^0) < 0$ (und damit auch $f_{x_2x_2}(x_1^0, x_2^0) < 0$), so besitzt f an der Stelle (x_1^0, x_2^0) ein striktes lokales Maximum.

S. 2. 14.
Eine Funktion $f:\ D(f) \to R^1,\ D(f) \subseteq R^2$ besitze stetige partielle Ableitungen zweiter Ordnung an der Stelle $x^0 = (x_1^0, x_2^0) \in \operatorname{int} D(f)$.

Fall f an der Stelle (x_1^0, x_2^0) ein lokales Maximum bzw. Minimum besitzt, ist (x_1^0, x_2^0) eine kritische Stelle von f, und es gilt

$$f_{x_1x_1}(x_1^0, x_2^0) \cdot f_{x_2x_2}(x_1^0, x_2^0) > \left(f_{x_1x_2}(x_1^0, x_2^0)\right)^2$$

sowie $$f_{x_1x_1}(x_1^0, x_2^0) \le 0$$

bzw. $$f_{x_1x_1}(x_1^0, x_2^0) \ge 0.$$

<u>D. 2. 21.</u> (*Sattelstelle, Sattelpunkt*)
Sei $f:\ D(f) \to R^1,\ D(f) \subseteq R^2$, eine Funktion, die in $(x_1^0, x_2^0) \in D(f)$ stetige partielle Ableitungen 1. Ordnung besitzt. Sei $(x_1^0, x_2^0) \in D(f)$ eine kritische Stelle der Funktion f. Dann heißt (x_1^0, x_2^0) eine *Sattelstelle von* f, falls f an der Stelle (x_1^0, x_2^0) kein lokales Extremum hat. Der zugehörige Punkt $\left(x_1^0, x_2^0, f(x_1^0, x_2^0)\right)$ heißt *Sattelpunkt* von f.

<u>S. 2. 15.</u>
Eine Funktion $f:\ D(f) \to R^1,\ D(f) \subseteq R^2$ besitze stetige partielle Ableitungen zweiter Ordnung an der Stelle $(x_1^0, x_2^0) \in D(f)$ und (x_1^0, x_2^0) sei eine kritische Stelle von f. Gilt außerdem

$$f_{x_1x_1}(x_1^0, x_2^0) \cdot f_{x_2x_2}(x_1^0, x_2^0) < \left(f_{x_1x_2}(x_1^0, x_2^0)\right)^2,$$

so hat f an der Stelle (x_1^0, x_2^0) eine Sattelstelle.

<u>B. 2. 17.</u>
Gilt für eine kritische Stelle (x_1^0, x_2^0)

$$f_{x_1x_1}(x_1^0, x_2^0) \cdot f_{x_2x_2}(x_1^0, x_2^0) = \left(f_{x_1x_2}(x_1^0, x_2^0)\right)^2,$$

so kann an dieser Stelle ein relatives Extremum oder auch ein Sattelpunkt von f vorliegen.

<u>BS. 2. 5.</u>
Gegeben sei die Produktionsfunktion

$$Q(r_1, r_2) = 440 + 4r_1 + 10r_2 - r_1^2 + 3r_1 \cdot r_2 - 2.5r_2^2$$

mit

r_1, r_2: Inputmengen
Q: Output.

Bestimmen Sie die Inputkombination, für die der Output maximal wird.

Solution:

$$Q_{r_1}(r_1, r_2) = 4 - 2r_1 + 3r_2 := 0$$
$$Q_{r_2}(r_1, r_2) = 10 + 3r_1 - 5r_2 := 0$$

$$\Rightarrow \quad r_1 = 50, \quad r_2 = 32$$
$$Q_{r_1r_1}(r_1, r_2) = -2, \quad Q_{r_1r_2}(r_1, r_2) = 3, \quad Q_{r_2r_2}(r_1, r_2) = -5 .$$

Für die Inputkombination $r_1 = 50,\ r_2 = 32$ wird der Output maximal sein, denn:

$$Q_{r_1r_1}(r_1, r_2) \cdot Q_{r_2r_2}(r_1, r_2) - \left[Q_{r_1r_2}(r_1, r_2)\right]^2 = (-2) \cdot (-5) - 3^2 = 1 > 0 \text{ and } Q_{r_1r_1}(r_1, r_2) = -2 < 0 .$$

Der maximale Output lautet dann $Q(50, 32) = 700$.

<u>D. 2. 22.</u> (*Extremwertproblem unter Nebenbedingungen*)
Unter einem *Extremwertproblem unter Nebenbedingungen* verstehen wir folgende Aufgabe:

$$\underset{(\min)}{\max}\left\{ f : D(f) \to R^1, D(f) \subseteq R^n \mid g_i(x) = 0,\ x \in D(f),\ i = 1, 2, ..., m \right\}.$$

<u>B. 2. 18.</u>
Für die Lösung der Extremwertprobleme unter Nebenbedingungen bieten sich zwei Möglichkeiten an:

(1) die Variablensubstitution,
(2) die Multiplikatorenregel von Lagrange.

<u>B. 2. 19.</u> (*Variablensubstitution*)
Für den Fall, dass sich das System der Gleichungen nach m der Variablen auflösen lässt, kann man das Problem auf ein übliches Extremwertproblem zurückführen.
Durch $g_i(x),\ i = 1, 2, ...m,$ sind dann nämlich m Funktionen $\varphi_1, ..., \varphi_m$ von $n - m$ Variablen $x_{m+1}, ..., \varphi_n$ gegeben, so dass gilt:

$$x_1 = \varphi_1(x_{m+1}, ..., x_n)$$
$$x_2 = \varphi_2(x_{m+1}, ..., x_n)$$
$$.$$
$$.$$
$$.$$
$$x_m = \varphi_m(x_{m+1}, ..., x_n) .$$

Setzt man die so gewonnenen Ausdrücke für $x_1, ..., x_m$ in die Funktion f ein, deren Extremwerte gesucht sind, so erhält man eine zusammengesetzte Funktion f^*, die nur noch von den $n-m$ Variablen $x_{m+1},...,x_n$ abhängt. Diese Variablen unterliegen ihrerseits keinen weiteren Beschränkungen mehr. Damit hat man:

$$\underset{(\min)}{\max}\left\{f^*: D(f^*) \to R^1, D(f^*) := D(f) \cap D(\varphi_1) \cap D(\varphi_1) \cap ... \cap D(\varphi_m)\right\}.$$

S. 2. 16.

Seien $f:\ D(f) \to R^1,\ D(f) \subseteq R^2$ und $g:\ D(g) \to R^1,\ D(g) \subseteq R^2$. Es bestehe das Problem

$$\underset{(\min)}{\max}\left\{f(x_1,x_2) \mid g(x_1,x_2)=0\right\}.$$

Sowohl f als auch g sollen nach allen ihren Variablen stetige partielle Ableitungen erster Ordnung besitzen. Zudem gelte in einer Umgebung eines inneren Punktes $\left(x_1^0,x_2^0\right) \in D(g)$

$$\frac{\partial g}{\partial x_1} \neq 0 \quad \left(\text{oder } \frac{\partial g}{\partial x_2} \neq 0\right).$$

Dann wird durch $g(x_1,x_2)$ implizit eine Funktion φ (bzw. ψ) gegeben, derart dass $x_1 = \varphi(x_2)$ (bzw. $x_2 = \psi(x_1)$) gilt.

In diesem Falle ist eine notwendige Bedingung für ein Extremum von f an der Stelle $\left(x_1^0,x_2^0\right)$ unter der Nebenbedingung $g(x_1,x_2)=0$ dadurch gegeben, dass an der Stelle $\left(x_1^0,x_2^0\right)$ gilt:

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} + \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \left(-\frac{\dfrac{\partial g}{\partial x_2}}{\dfrac{\partial g}{\partial x_1}} \right) = 0$$

bzw.

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot \left(-\frac{\dfrac{\partial g}{\partial x_1}}{\dfrac{\partial g}{\partial x_2}} \right) = 0$$

BS. 2. 6.

Ein Konsument hat für zwei Güter G_1 und G_2 die Nutzenfunktion

$$U(x_1,x_2) = 2x_1 \cdot x_2,\ (x_1,x_2 > 0).$$

Hier sind:

x_1: die Menge des Gutes G_1,

x_2: die Menge des Gutes G_2.

Die Güter G_1 bzw. G_2 kosten 3 GE/ME bzw. 2 GE/ME.
Der Konsument möchte für die Güterbeschaffung genau 60 GE ausgeben.
Für welche Güterkombination hat der Konsument den maximalen Nutzen?

Lösung:

Es liegt folgendes Problem vor:

$$U(x, y) = 2x_1 \cdot x_2 \to \max!$$

unter der Nebenbedingung

$$3x_1 + 2x_2 = 60\,.$$

Es gilt:

$$x_2 = -\frac{3}{2}x_1 + 30\,,$$

$$U^*(x_1) = 2x_1 \cdot \left(-\frac{3}{2}x_1 + 30\right) \to \max!$$

$$U^*(x_1) = -3x_1^2 + 60x_1 \to \max!$$

$$\frac{dU^*}{dx_1} = -6x_1 + 60\,, \qquad \frac{dU^*}{dx_1} := 0 \;\Rightarrow\; x_1 = 10, \qquad \frac{d^2U^*}{dx_1^2} = -6 < 0\,.$$

Damit nimmt die Funktion $U^*(x_1)$ ihr absolutes Maximum in $x_1 = 10$. Die Substitution dieses Wertes in die Nebenbedingung liefert $x_2 = 15$.
Für die Güterkombination $x_1 = 10$ und $x_2 = 15$ erzielt der Konsument einen maximalen Nutzen von $U(10,15) = 300$ Einheiten.

<u>S. 2. 17.</u> (*Lagrangesche Multiplikatorregel*)
Seien f und $g_i, i = 1,2,...,m,$ reellwertige Funktionen von n reellen Variablen $x_1, x_2,..., x_n$ mit $m < n$. Die Funktionen f und $g_1, g_2,..., g_m$ mögen in einer Umgebung $U_\varepsilon\left(x_1^0, x_2^0,..., x_n^0\right)$ einer Stelle $\left(x_1^0, x_2^0,..., x_n^0\right) \in D(f) \cap D(g_1) \cap ... \cap D(g_m)$ nach allen Variablen stetige partielle Ableitungen erster Ordnung besitzen.

Die (Jacobische) Matrix

$$J(x) := \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1}, & . & . & . & , \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1}, & . & . & . & , \frac{\partial g_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

besitze an der Stelle $\left(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0\right)$ den Rang m.
Sei

$$L\left(x_1,...,x_n;\lambda_1,...,\lambda_m\right) := f(x_1,...,x_n) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x_1,...,x_n)$$

die *Lagrangefunktion* des gegebenen Problems.
Dann ist eine notwendige Bedingung für ein Extremum von $f(x_1,...,x_n)$ an der Stelle $\left(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0\right)$ unter den Nebenbedingungen $g_i(x) = 0,\ i = 1,2,...,m$:

$$\begin{aligned} L_{x_j}\left(x_1^0,...,x_n^0;\lambda_1^0,...,\lambda_m^0\right) &= 0, \quad j = 1,2,...,n, \\ L_{\lambda_i}\left(x_1^0,...,x_n^0;\lambda_1^0,...,\lambda_m^0\right) &= 0, \quad i = 1,2,...,m. \end{aligned}$$

B. 2. 20.
Auf die hinreichenden Bedingungen für die Existenz eines relativen Extremums einer Funktion mit mehreren Variablen unter $m \geq 2$ Nebenbedingungen als Gleichungen wollen wir hier nicht eingehen.
Für $m = 1$ gibt es folgende hinreichende Bedingung:

Sei

$$\bar{H}\left(x_1, x_2\right) := \begin{pmatrix} 0 & g_{x_1}\left(x_1, x_2\right) & g_{x_2}\left(x_1, x_2\right) \\ g_{x_1}\left(x_1, x_2\right) & L_{x_1,x_1}(x_1, x_2) & L_{x_1,x_2}(x_1, x_2) \\ g_{x_2}\left(x_1, x_2\right) & L_{x_2,x_1}(x_1, x_2) & L_{x_2,x_2}(x_1, x_2) \end{pmatrix}$$

die sog. *erweiterte Hesse- Matrix.*
Dann gilt:

$$\bar{H}\left(x_1^0, x_2^0\right) \begin{cases} > 0 & \Rightarrow \quad \text{relatives Maximun} \\ < 0 & \Rightarrow \quad \text{relatives Minimum}, \\ = 0 & \Rightarrow \quad \text{unentscheidbar} \end{cases} \quad x^0 := \begin{pmatrix} x_1^0 & x_2^0 \end{pmatrix}^T : \text{eine stationärer Punkt}$$

BS. 2. 7.
Lösen Sie das Beispiel BS. 2. 6. nach der Methode der Lagrange-Multiplikatoren.
(Verwenden Sie dazu nur die notwendigen Bedingungen.)

Lösung:

$$L\left(x_1, x_2; \lambda\right) = 2x_1 \cdot x_2 - \lambda \cdot \left(3x_1 + 2x_2 - 60\right),$$

$$L_{x_1}(x_1,x_2;\lambda)=2x_2-3\lambda=0 \quad \Rightarrow \quad \lambda=\frac{2}{3}x_2$$
$$L_{x_2}(x_1,x_2;\lambda)=2x_1-2\lambda=0 \quad \Rightarrow \quad \lambda=x_1$$
$$\Rightarrow \quad x_1=\frac{2}{3}x_2$$

$$L_\lambda(x,y;\lambda)=3x+2y-60=0$$

$$\left.\begin{array}{l} x_1=\frac{2}{3}x_2 \\ 3x_1+2x_2-60=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad x_1=10, \quad x_2=15$$

$\lambda=10$.

$$\det\bar{H}=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}=24>0$$

Für die Güterkombination $x_1=10$ und $x_2=15$ erzielt der Konsument einen maximalen Nutzen von $U(10,15)=300$ Einheiten.

D. 2. 23. (***Problem der mathematischen Optimierung***)
Unter dem *Problem der mathematischen Optimierung* verstehen wir

$$opt\left\{f(x) \mid g_i(x)\le 0,\ i=1,2,...,m;\ x_j\ge 0,\ j=1,2,...,n\right\}.$$

B. 2. 21.
Um die Existenz einer Lösung des Problems der mathematischen Optimierung sicherzustellen und um auch Lösungsverfahren angeben zu können, sind die folgenden Bedingungen wichtig:

(B1) $g_1,...,g_n$ sind konvex.
(B2) f ist auf dem *zulässigen Bereich*

$$M:=\left\{x\in R \mid g_i(x)\le 0,\ i=1,2,...,m;\ x_j\ge 0,\ j=1,2,...,n\right\}$$

konvex.
(B3) M besitze mindestens einen inneren Punkt, d.h. $\operatorname{int} M\ne\varnothing$.
(B4) $f,g_1,...,g_m$ besitzen stetige partielle Ableitungen 1. Ordnung nach allen Variablen $x_1,x_2,...,x_n$.

D. 2. 23. (***Sattelpunkt der Lagrangefunktion***)
Man sagt, die Lagrangefunktion besitzt an der Stelle f einen *Sattelpunkt* bezüglich $(x_1,...,x_2;\lambda_1,...,\lambda_m)\ge 0$, wenn gilt:

$$L\left(x_1^0,...,x_n^0;\lambda_1,...,\lambda_m\right)\le L\left(x_1^0,...,x_n^0;\lambda_1^0,...,\lambda_m^0\right)\le L\left(x_1,...,x_n;\lambda_1^0,...,\lambda_m^0\right),$$

$$\forall\left(x_1,...,x_n\right)\ge 0, \quad \forall(\lambda_1,...,\lambda_m)\ge 0.$$

S. 2. 18.
Ist $\left(x_1^0,...,x_n^0;\lambda_1^0,...,\lambda_m^0\right)$ ein Sattelpunkt von L bezüglich $\left(x_1,...,x_2;\lambda_1,...,\lambda_m\right)\geq 0$, so ist $\left(x_1^0,...x_n^0\right)$ eine Lösung des Problems der mathematischen Optimierung.

S. 2. 19.
Es gelten die Bedingungen (B1-B4). Weiter sei $\left(x_1^0,...x_n^0\right)$ eine Lösung des Problems der mathematischen Optimierung.
Dann existieren m reelle Zahlen $\lambda_1^0,...,\lambda_m^0 \geq 0,$ so dass f ein Sattelpunkt der Lagrangefunktion bezüglich $\left(x_1,...,x_2;\lambda_1,...,\lambda_m\right)\geq 0$ ist.

S. 2. 20. (*Kuhn-Tucker*)
Es gelten die Bedingungen B1 – B4. Hat die Lagrangefunktion einen Sattelpunkt $\left(x_1^0,...,x_n^0;\lambda_1^0,...,\lambda_m^0\right)$, so gilt:

$$
\begin{aligned}
&L_{x_j}\left(x_1^0,...,x_n^0;\lambda_1^0,...,\lambda_m^0\right)\geq 0, \quad j=1,2,...,n\\
&L_{\lambda_i}\left(x_1^0,...,x_n^0;\lambda_1^0,...,\lambda_m^0\right)\leq 0, \quad i=1,2,...,m\\
&\sum_{j=1}^{n} x_j^0 \cdot L_{x_j}\left(x_1^0,...,x_n^0;\lambda_1^0,...,\lambda_m^0\right)=0\\
&\sum_{i=1}^{m} \lambda_i^0 \cdot L_{\lambda_i}\left(x_1^0,...,x_n^0;\lambda_1^0,...,\lambda_m^0\right)=0.
\end{aligned}
$$

S. 2. 21.
Unter den Voraussetzungen B1 – B4 sind die Kuhn-Tucker-Bedingungen auch hinreichend dafür, dass $\left(x_1^0,...,x_n^0;\lambda_1^0,...,\lambda_m^0\right)\geq 0$ ein Sattelpunkt der Lagrange-Funktion ist.

S. 2. 22.
Es gelten die Voraussetzungen $\left(x_1^0,...x_n^0\right)\geq 0$ genau dann eine Lösung des Problems der mathematischen Optimierung, wenn reelle Zahlen $\lambda_1^0,\lambda_2^0,...,\lambda_m^0\geq 0$ existieren, so dass die Kuhn-Tucker-Bedingungen erfüllt sind.

(Letzte Aktualisierung: 12.01.17)