Analysis in der Ökonomie

(Teil 2)
Lösungen

1.

1.

$$P(40,\ 60) = 2352.16$$

2.

$$P_A(A,K) = 30A^{-0.4} \cdot K^{0.4}, \qquad P_A(40,60) = 35.28\,.$$

Erhöht man, ausgehend von $A = 40,\ K = 60$, *nur* A um eine Einheit, so erhöht sich die Produktion um etwa 35.28 Einheiten.

3.

$$\varepsilon_{P,A}(A,K) = \frac{A}{50A^{0.6} \cdot K^{0.4}} \cdot 30A^{-0.4} \cdot K^{0.4} = 0.6\,.$$

Erhöht man, ausgehend von $A = 40,\ K = 60$, *nur* A um ein Prozent, so erhöht sich die Produktion um etwa 0.6 Prozent.

2.

1.

i) $dy_A = \dfrac{\partial y}{\partial A} dA = 0.4A^{-0.8} K^{0.8} dA\,;$ $\qquad dy_A(20,10) \approx 9.2297dA$

$dy_K = \dfrac{\partial y}{\partial K} dK = 1.6A^{0.2} K^{-0.2} dK\,;$ $\qquad dy_K(20,10) \approx 1.8379dK$

ii) $dy = \dfrac{\partial y}{\partial A} dA + \dfrac{\partial y}{\partial K} dK\,;$ $\qquad dy\ (20,10) = 0.2297dA + 1.8379dK$

2.

a) $dy(A = 20, K = 10, dA = -0.3, dK = 0.1) = 0.115$

b) $\Delta y = y(19.7, 10.1) - y(20,10) = 0.114$

3.

1.

$$\begin{aligned} G_1(p_1, p_2) &= p_1 x_1 - K_1(x_1) \\ &= -2p_1^2 - p_1 p_2 + 104 p_1 + 2 p_2 - 320 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_2(p_1, p_2) &= p_2 x_2 - K_2(x_2) \\ &= -3p_2^2 - p_1 p_2 + 2 p_1 + 126 p_2 - 360 \end{aligned}$$

$G(p_1, p_2) = -2p_1^2 - 2p_1p_2 - 3p_2^2 + 106p_1 + 128p_2 - 680$

2.

$G_{p_1}(p_1, p_2) = -4p_1 - 2p_2 + 106 = 0$

$G_{p_2}(p_1, p_2) = -2p_1 - 6p_2 + 128 = 0$

$p_1 = 19, \quad p_2 = 15$

$G_{p_1p_1} = -4, \qquad G_{p_1p_2} = -2, \qquad G_{p_2p_2} = -6$

Wegen $G_{p_1p_1} \cdot G_{p_2p_2} - (G_{p_1p_2})^2 = (-4)\cdot(-6) - (-2)^2 > 0, \quad G_{p_1p_2} = \text{-}4 < 0$ ist der Gewinn für $p_1 = 19, \quad p_2 = 15$ maximal; er beträgt $G(19,15) = 1287$ GE.

3.

$G_1(p_1, 16) = -2p_1^2 + 88p_1 - 288 := \tilde{G}(p_1)$

$\tilde{G}_1'(p_1) = -4p \ + 88 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad p_1 = 22$

$\tilde{G}_1''(p_1) = -4 < 0$

Damit ist G_1 für $p_1 = 22$ maximal; der maximale Gewinn beträgt 680 GE.

4.

Da der Preis $p_1 = 19$ auf $p_1 = 22$ ansteigt, ist es für die Käufer vorteilhaft, wenn der Konflikt beigelegt wird.

4.

$$G(x_1, x_2) = (55 - x_1 - x_2)x_1 + (70 - x_1 - 2x_2)x_2 - (x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) \to Max!$$

$$G(x_1, x_2) = -2x_1^2 - 3x_2^2 - 3x_1x_2 + 55x_1 + 70x_2 \to Max!$$

$$G_{x_1}(x_1, x_2) = -4x_1 - 3x_2 + 55$$

$$G_{x_2}(x_1, x_2) = -3x_1 - 6x_2 + 70$$

$$\begin{cases} -4x_1 - 3x_2 + 55 = 0 \\ -3x_1 - 6x_2 + 70 = 0 \end{cases} \qquad \Rightarrow \quad x_1 = 8.00, \quad x_2 = \frac{23}{3} \approx 7.67$$

$$\det H = \det\begin{pmatrix} -4 & -3 \\ -3 & -6 \end{pmatrix} = 15 > 0, \quad G_{x_1x_1} = -4$$

Daher ist der Gewinn des Betriebs maximal, wenn 8.00 ME von P_1 und 7.67 ME von P_2 produziert werden.

2.

$$G(x_1 = 8.00, x_2 = 7.67) = 488.33\,\text{GE}.$$

3.

$$p_1 = 39.33 \text{ GE}, \quad p_2 = 46.67 \text{ GE}$$

5.

$$L(A,K;\lambda) = A^{0.6} \cdot K^{0.25} - \lambda\left(8A + 5K - 680\right)$$

$$L_A(A,K;\lambda) = 0.6A^{-0.4} \cdot K^{0.25} - 8\lambda$$

$$L_K(A,K;\lambda) = 0.25A^{0.6} \cdot K^{-0.75} - 5\lambda$$

$$L(A,K;\lambda) = -\left(8A + 5K - 680\right)$$

$$\begin{cases} 0.60A^{-0.4} \cdot K^{0.25} - 8\lambda = 0 \\ 0.25A^{0.6} \cdot K^{-0.75} - 5\lambda = 0 \\ 8A + 5K - 680 = 0 \end{cases}$$

Wir dividieren die erste Gleichung durch die zweite und erhalten:

$$\frac{0.60A^{-0.4} \cdot K^{0.25}}{0.25A^{0.6} \cdot K^{-0.75}} = \frac{8\lambda}{5\lambda}$$

$$\frac{2.4K}{A} = 1.6, \qquad K = \frac{2}{3}A.$$

Setzt man nun $K = \frac{2}{3}A$ in die 3. Gleichung, so erhält man:

$$A = 60, \quad K = 40$$

Das Einsetzen dieser Werte in die erste Gleichung liefert $\lambda = 0.03667040961 \approx 0.037$.

$$L_{AA}(A,K) = -0.24A^{-1.4}K^{0.25}, \qquad L_{AK}(A,K) = 0.15A^{-0.4}K^{-0.75}$$

$$L_{KA}(A,K) = 0.15A^{-0.4}K^{-0.75}, \qquad L_{KK}(A,K) = -0.1875A^{0.6}K^{-1.75}$$

$$\bar{H}(A,K) = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 5 \\ 8 & -0.24A^{-1.4}K^{0.25} & 0.15A^{-0.4}K^{-0.75} \\ 5 & 0.15A^{-0.4}K^{-0.75} & -0.1875A^{0.6}K^{-1.75} \end{pmatrix}$$

$$\bar{H}(A=60,K=40)=\begin{pmatrix}0 & 8 & 5\\ 8 & -0.0020 & 0.0012\\ 5 & 0.0012 & -0.0034\end{pmatrix}$$

$$\det\bar{H}(A=60,K=40)=0.3636>0.$$

Interpretation:
Damit ist die Produktion für $A=60, K=40$ maximal. Es gilt $q(60,40)=A^{0.6}\cdot K^{0.25}\approx 29.3363$
$\lambda=0.037$ bedeutet:
Erhöht man die rechte Seite der Nebenbedingung 680 um eine Einheit, so erhöht sich die Produktion um etwas 0.037 Einheiten.

6.
1.

$$K(x_1,x_2)=(4000-x_1)^2+(2750-x_2)^2\to Min!$$

$$x_1+2x_2=4500$$

$$L(x_1,x_2,\lambda)=(4000-x_1)^2+(2750-x_2)^2-\lambda\cdot(x_1+2x_2-4500)\to Min!$$

$$L_{x_1}=-2\cdot(4000-x_1)-\lambda=0 \qquad\Rightarrow\qquad x_1=4000-0.5\lambda$$
$$L_{x_2}=-2\cdot(2750-x_2)-2\lambda=0 \qquad\Rightarrow\qquad x_1=2750-\lambda$$
$$L_\lambda(x_1,x_2)=-(x_1+2x_2-4500)=0$$

$$x_1=3000,\quad x_2=750.$$

$$\lambda=-8000+2\cdot 3000=-2000$$

$$x_1=3000,\quad x_2=750.$$

$$L_{x_1x_1}=2,\qquad L_{x_1x_2}=0,\qquad L_{x_2x_1}=0,\quad L_{x_2x_2}=2$$

$$\det\bar{H}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 0\\ 2 & 0 & 2\end{pmatrix}=-10>0.$$

Daher sind die Lagerkosten minimal für $x_1=3000,\ x_2=750$

2.

$$K(3000,750)=5000000$$

(Letzte Aktualisierung: 13.01.2017)