Analysis in der Ökonomie

(Teil 2)

Aufgaben

1.
Ein Betrieb hat die Produktionsfunktion

$$P(A,K) = 50 \cdot A^{0.6} \cdot K^{0.4}, \quad 0 \le A \le 100, \quad 0 \le K \le 200.$$

Hier sind:

A: der Arbeitsinput,
K: der Kapitalinput,
$P(A,K)$: die produzierte Menge in Abhängigkeit von A und K.

1. Bestimmen Sie die produzierte Menge für $A = 40$ und $K = 60$.
2. Berechnen und interpretieren Sie die erste partielle Ableitung der Produktionsfunktion bezüglich des Inputs Arbeit für $A = 40$ und $K = 60$.
3. Zeigen Sie, dass der Exponent 0.6 die Elastizität der Produktion bezüglich des Inputs Arbeit ist. Was versteht man darunter?

2.
Gegeben sei die Produktionsfunktion

$$y(A,K) = 2A^{0.2}K^{0.8}, \quad A,K > 0$$

Dabei sind:

K: das Kapital
A: die Arbeitskräfte
y: die Produktion

1. Ermitteln Sie für die Faktorkombination $A = 20, K = 10$

   i.) die partiellen
   ii.) die totalen Outputänderungen,

   wenn die Inputs um dA bzw. dK geändert werden

2. Wie ändert sich der Output

   a) näherungsweise
   b) exakt,

   wenn der Arbeitsinput um 0.3 Einheiten vermindert und gleichzeitig der Kapitalinput um 0.1 Einheit erhöht wird, ausgehend von $A = 20, K = 10$?

3.
Zwei Produzenten P_1, P_2 bieten je ein Gut an. Zwischen den Absatzvariablen x_1, x_2 und den Preisvariablen p_1, p_2 gelten die Beziehungen

$$\begin{aligned} x_1 &= 100 - 2p_1 - p_2 \\ x_2 &= 120 - p_1 - 3p_2 \end{aligned}$$

Die Kosten sind gegeben durch

$$\begin{aligned} K_1(x_1) &= 120 + 2x_1 \\ K_2(x_2) &= 120 + 2x_2 \end{aligned}$$

1. Ermitteln Sie die Gewinnfunktionen G_1, G_2 beider Produzenten sowie die gemeinsame Gewinnfunktion $G = G_1 + G_2$ jeweils in Abhängigkeit von p_1, p_2.
2. Wie sind die Preise zu wählen, dass der gemeinsame Gewinn maximal wird? Geben Sie den maximalen Gewinn an.
3. Nach einem Streit setzt Produzent P_2 den Preis $p_2 = 16$. Wie hat dann P_1 den Preis p_1 zu wählen, damit G_1 maximal wird?
4. Ist es für die Käufer des von G_1 angegebenen Gutes von Vorteil, wenn der Konflikt zwischen P_1 und P_2 beigelegt wird?

4.
Ein Betrieb verkauft zwei Produkte P_1 und P_2. Er hat die Nachfragefunktionen:

$$p_1 = 55 - x_1 - x_2 \ , \qquad p_2 = 70 - x_1 - 2x_2$$

und die Kostenfunktion

$$K(x_1, x_2) = x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 .$$

1. Für welche Produktionsmengen wird ein maximaler Gewinn erzielt?
2. Wie hoch ist der maximale Gewinn?
3. Wie lauten die entsprechenden Preise?

5.
Maximieren Sie die Produktionsfunktion

$$q(A, K) = A^{0.6} \cdot K^{0.25}$$

unter der Bedingung

$$8A + 5K = 680$$

nach der Methode der Lagrange-Multiplikatoren. Interpretieren Sie Ihre Ergebnisse.

6.
In einem Lager mit einer Lagerkapazität von 4500 Mengeneinheiten werden zwei Materialien M_1 und M_2 gelagert. Bei dem Material M_1 handelt es sich um hochwertige Diamantbohrer, bei M_2 um Turbinenradschaufeln. Zur Lagerung eines Diamantbohrers benötigt man genau

eine ME der Lagerkapazität. Die Lagerung einer Turbinenradschaufel beansprucht aufgrund ihres mächtigen Volumens bereits 2 ME.
Da die Lagerkapazität begrenzt ist, konkurrieren die beiden Materialarten um den verfügbaren Lagerplatz. Zurzeit sei das Lager leer, so dass die volle Lagerkapazität zur Verfügung steht. Durch eine neue Bestellung soll das Lager vollständig aufgefüllt werden.
Die Lagerkosten K können durch folgende Gleichung angegeben werden:

$$K = (4000 - x_1)^2 + (2750 - x_2)^2 .$$

Dabei ist

x_i: „Die Bestellmenge für M_i, $i = 1, 2$".

1. Welche Mengen von den beiden Materialarten müssen bestellt werden, um die Lagerkosten zu minimieren?
2. Wie hoch sind die minimalen Lagerkosten.

(Letzte Aktualisierung: 05.06.2014)