Analysis in der Ökonomie
(Teil 1)
Aufgaben

1.
In einer Fabrik, die Farbfernseher produziert, fallen monatlich fixe Kosten in Höhe von 1 Mio. € an. Die variablen Kosten betragen für jeden produzierten Fernseher 400 €. Maximal können 5000 Fernsehgeräte im Monat produziert werden.

1. Gibt es einen Zusammenhang zwischen Produktionsmenge und Kosten?
2. Handelt es sich um eine Funktion?
3. Was ist die unabhängige Variable x?
4. Was ist die abhängige Variable y?
5. Wie lautet die Funktion $K = f(x)$?
6. Welchen Definitions- und Wertebereich hat die Funktion?
7. Stellen Sie die Funktion tabellarisch und grafisch dar.

2
In einem Unternehmen gilt die Kostenfunktion

$$K(x) = 700 + 3x$$

1. Zeichnen Sie die Funktion
2. Wie hoch sind die Fixkosten und die variablen Kosten pro Stück?
3. Welche Kosten entstehen bei der Produktion von 150 Mengeneinheiten?

3
Gegeben sei die Angebotsfunktion

$$x_A = -10 + p$$

und die Nachfragefunktion

$$x_N = 20 - \frac{1}{3}p\,.$$

Berechnen Sie den Gleichgewichtspreis und die Gleichgewichtsmenge.

4
Bei der Produktion von 1000 Einheiten eines Produktes sind Kosten in Höhe von 15000 € angefallen. Eine Verminderung der Produktion um 100 Stück verursachte eine Kostenreduktion auf 13800 €.
Wie lautet die Kostenfunktion, die als linear angesehen wird?

5.
Auf dem Markt für ein bestimmtes Produkt gilt ein Maximalpreis von 500 € und eine Sättigungsmenge von 200 Stück.
Der Mindestpreis ist 100 € und die Steigung der Angebotsfunktion beträgt 1.5.

1. Bestimmen Sie die Nachfrage- und Angebotsfunktion, wenn beide einen linearen Verlauf haben sollen.
2. Bestimmen Sie den Gleichgewichtspreis und die Gleichgewichtsmenge grafisch und analytisch.
3. Welche Folge hat eine staatliche Festlegung des Preises auf 200 € für Nachfrage und Angebot?

6.
Gegeben sei die Produktionsfunktion

$$x = \sqrt[3]{4r^2}, \quad r \geq 0,$$

wobei r die Einsatzmenge eines bestimmten Produktionsfaktors und x die ausgebrachte Menge darstellt. Der Preis für eine Einheit des Faktors betrage 20 GE, die Fixkosten der Produktion belaufen sich auf 40 GE.
Bestimmen Sie die Gesamtkostenfunktion und skizzieren Sie diese.

7.
Eine Produktionsfunktion sei gegeben durch

$$y = \sqrt{10r}, \quad (r: \text{Faktoreinsatz})$$

1. Hat die Produktionsfunktion zunehmende oder abnehmende Grenzerträge?
2. Ermitteln Sie die zugehörige Kostenfunktion, indem Sie davon ausgehen, daß eine Einheit des Inputfaktors 2 € kostet.

8.
Eine Autovermietung vermittelt einen PKW über das Wochenende zu folgenden zwei alternativen Tarifen:

Tarif A: Grundmiete 100€
zuzüglich km-Gebühren:
für die ersten 100 km 1 € /km
für jeden km über 100 km bis 200 km 0.80 €/km
für jeden km über 200 km bis 400 km 0.60 €/km
für jeden km über 400 km hinaus 0.50 €/km

Tarif B : Grundmiete 150 €
zuzüglich km-Gebühren:
für die ersten 200 km 0.70 € /km
für jeden km über 200 km bis 500 km 0.50 €/km
für jeden km über 500 km hinaus 0.40 €/km

1. Ermitteln Sie die beiden Gesamtkostenfunktionen $K_A(x)$ und $K_B(x)$ in Abhängigkeit von der gefahrenen Strecke x und skizzieren Sie beide Funktionen in einem Koordinatensystem
2. Geben Sie an für welche km - Leistung welcher Tarif für den Mieter am günstigsten ist.

9.
Für die Herstellung eines Gutes gilt die Produktionsfunktion

$$x(r) = -20 + 0.1r\ .$$

Hier sind:

x : die Outputmenge,

r : die Inputmenge.

Der Preis pro Faktoreinheit beträgt 2 GE.
Zur Produktion dieses Gutes muss eine Maschinenhalle gemietet werden, für die Kosten in Höhe von 300 GE pro Monat anfallen.
Aus Marktforschungen ergibt sich folgende Preis-Absatz-Funktion:

$$p(x) = 220 - 4x, \quad x > 0.$$

1. Bestimmen Sie die Gesamtkosten- und die Grenzkostenfunktionen (für den Zeitraum eines Monates).
2. Welche Produktionsmenge ist kostenminimal?
3. Bestimmen Sie die Umsatz- und die Grenzumsatzfunktionen.
4. Für welche Produktionsmenge wird der Gewinn maximal sein? Wie hoch ist dann der Gewinn?
5. Bestimmen Sie den Preis, für den der Gewinn maximal ist.

10.
Der preis eines Gutes sei durch folgende Funktion bestimmt.

$$p(x) = 100 - 0.5x\ .$$

Die Gesamtkostenfunktion verlaufe gemäß

$$K(x) = 1000 + 10x$$

Bestimmen Sie

1. die Erlösfunktion
2. die Gewinnfunktion
3. die gewinnmaximale Menge.

11.
Die Gesamtkosten eines Betriebes seien gegeben durch

$$K(x) = 1000 + 20x$$

1. Wie hoch sind die Grenzkosten und was bedeuten sie?
2. Ermitteln Sie die Funktion der Stückkosten.
3. Untersuchen Sie das Verhalten der Gesamt- und Stückkosten für $x \to +\infty$.

12.
Gegeben sei folgende Kostenfunktion

$$K(x) = 60 - 12x + 2x^2, \quad x > 0.$$

1. Bestimmen Sie die Produktionsmenge, bei der die Gesamtkosten ein Minimum annehmen.
2. Stellen Sie die Durchschnittskostenfunktion auf und suchen Sie die Produktionsmenge, bei der diese Funktion ein Minimum hat.
3. Hat die Grenzkostenfunktion ein Minimum? (Begründung!)
4. An welcher Stelle schneidet die Grenzkostenfunktion die Durchschnittskurve?
5. Welcher Unterschied besteht inhaltlich zwischen Grenz- und Durchschnittskosten?

13.
Gegeben sei die Produktionsfunktion

$$x(r) = -\frac{1}{3}r^3 + 2r^2.$$

1. Bei welcher Faktoreinsatzmenge ist die produzierte Menge des Gutes maximal?
2. Bestimmen Sie den Bereich negativer Erträge?
3. Bestimmen Sie die Durchschnittsertragsfunktion.
4. Bestimmen Sie das Maximum der Durchschnittsertragsfunktion.
5. Erläutern Sie inhaltlich die erste Ableitung der Produktionsfunktion.

14.
Gegeben sei die Kostenfunktion $K(x)$ eines Monopolisten mit

$$K(x) = 0.01x^3 - 1.5x^2 + 120x + 4000.$$

Hier sind: K : Gesamtkosten; x : Output.

Der Monopolist operiert am Markt mit folgender Nachfragefunktion

$$p(x) = 1044 - 0.3x.$$

Hier sind: p : Preis; x : nachgefragte Menge

1. Bei welchem Preis bewirkt die Erhöhung des Preises um eine GE/ME einen Nachfragerückgang um 0.3 ME?
2. Ermitteln Sie die Höhe des zu produzierenden Outputs, bei dem die variablen Kosten pro produzierter Outputeinheit minimal werden?

3. Welche Menge muß der Monopolist produzieren und absetzen, um seinen Gesamtgewinn zu maximieren? Wie lautet der zugehörige Preis?
4. Für welchen Preis sind die Grenzkosten des Monopolisten minimal?

15.
Die Abhängigkeit der in einer Periode abgesetzten Menge x eines Produktes vom Preis p sei durch die Funktion

$$x(p) = 3900 - 30p - p^2, \qquad 0 \le p \le 45$$

gegeben. Die Gesamtkosten $K(x)$ für die Produktion der abgesetzten Menge x möge durch

$$K(x) = 2000 + 30x$$

gegeben sein.

1. Ermitteln Sie den Umsatz und den Gewinn als Funktion des Preises.
2. Wählen Sie den Preis so, daß der Gewinn maximal wird.
3. Untersuchen Sie das Monotonieverhalten der Gewinnfunktion.

16.
Für eine Einproduktunternehmung seien die Gesamtkosten für die Produktion von x Mengeneinheiten durch die Kostenfunktion

$$K(x) = 714 + 320x + 4x^2$$

gegeben. Die Preisabsatzfunktion sei durch

$$p(x) = 464 - 2x$$

gegeben.
Bestimmen Sie
1. die Umsatzfunktion,
2. den Bereich positiver Gewinne,
3. die Funktion, die die Kosten pro Mengeneinheit angibt (Stückkostenfunktion),
4. die Grenzkostenfunktion,
5. die gewinnmaximale Produktionsmenge
6. die Produktionsmenge bei maximalem Gewinn pro Mengeneinheit.

17.
Gegeben seien die Gesamtkosten K (Angaben in Geldeinheiten) in Abhängigkeit von der Ausbringungsmenge x (Angaben in Mengeneinheiten):

$$K(x) = 30x + \frac{1450x^2}{400 + x^2}, \quad 10 \le x \le 50.$$

1. Bestimmen Sie die Grenzkostenfunktion. Berechnen Sie den Funktionswert an der Stelle $x = 20$ und interpretieren Sie das Ergebnis.
2. Bestimmen Sie das absolute Minimum der Durchschnittskosten im angegebenen Bereich.
3. Untersuchen Sie das Monotonieverhalten der Durchschnittskostenfunktion.

18.
Die Gesamtkosten für die Produktion von x Mengeneinheiten eines Produktes seien durch die Kostenfunktion

$$K(x) = 8400x + \left(1008000x^2 - 3060x^3 + 3x^4\right) \cdot 10^{-4}.$$

Ermitteln Sie diejenigen Intervalle, in denen die Grenzkosten kleiner als die Kosten pro Mengeneinheit sind.

19.
Die Gesamtkosten für die Produktion von x Mengeneinheiten eines Produktes seien durch die Kostenfunktion

$$K(x) = 8400x + \left(1008000x^2 - 3060x^3 + 3x^4\right) \cdot 10^{-4}, \quad x \geq 100$$

Es sind die wichtigsten Eigenschaften der Stückkostenfunktion $k(x) := \frac{K(x)}{x}$ zu diskutieren.

20.
Die Abhängigkeit der in einer Periode abgesetzten Menge x eines Produktes vom Preis p sei durch die Funktion

$$x(p) = 100e^{-0.04p}, \quad 0 \leq p \leq 100,$$

gegeben. Die Gesamtkosten $K(x)$ für die Produktion der abgesetzten Menge x möge durch

$$K(x) = 2000 + 30x$$

gegeben sein.

1. Ermitteln Sie den Umsatz und den Gewinn als Funktion des Preises.
2. Wählen Sie den Preis so, daß der Gewinn maximal wird.

21.
In einer Einproduktunternehmung mit dem Absatz x und dem Preis p gilt für die Preis-Absatz-Funktion f

$$x = f(p) := \begin{cases} 1300 - \frac{1}{3}p^2 - 10p & \textit{für} \quad p \in [0, 45] \\ 0 & \textit{sonst} \end{cases}$$

und für die Kostenfunktion K

$$K(x) = 30x + \frac{2000}{3}$$

1. Ermitteln Sie die Gewinnfunktion in Abhängigkeit vom Preis.
2. Wie ist der Preis zu wählen, damit der Gewinn maximal wird? Wie hoch ist dann der Gewinn?
3. Diskutieren und interpretieren Sie das Monotonie- und das Krümmungsverhalten der Gewinnfunktion.

22.

Gegeben sei eine Preis-Absatz-Funktion f mit

$$x = f(p) = \begin{cases} -2p + 20 & \text{für} \quad p \in [0,10[\\ 0 & \text{für} \quad p \geq 10 \end{cases}$$

sowie die entsprechende Stückkostenfunktion k mit

$$k(x) = \begin{cases} -x + 12 & \text{für} \quad x \in [0,\ 10] \\ 2 & \text{für} \quad x > 10 \end{cases}$$

1. Bestimmen Sie den Maximal- und den Minimalabsatz sowie die dazugehörigen Kosten.
2. Für welche Preise ergibt sich ein Absatz von höchstens 10?
3. Ermitteln Sie die Gewinnfunktion in Abhängigkeit von $p \in [0,10[$.
4. Maximieren Sie den Gewinn und ermitteln Sie den gewinnmaximalen Preis unter der Bedingung $p \in [0,10[$

23.
Sei

$$p(x) = 16 - 0.5x$$

eine Nachfragefunktion.
Berechnen Sie an der Stelle $x_0 = 8$ die

1. Elastizität des Preises bezüglich der Nachfrage,
2. Elastizität der Nachfrage bezüglich des Preises

24.
Gegeben sei die Nachfragefunktion

$$p(x) = 10 - 0.5x$$

Gesucht ist die Elastizität der Nachfrage x bezüglich des Preises p bei einem Preis $p_0 = 6$ GE/ME.

25.
Gegeben sei die folgende Beziehung zwischen der nachgefragten Menge x und dem Preis p eines Produktes:

$$x(p) = \frac{500}{p+5} - 10, \quad 0 \leq p < 45$$

1. Bestimmen Sie die Grenznachfragefunktion.
2. Ermitteln Sie eine Funktion, die angibt, um wieviel Prozent sich die nachgefragte Menge näherungsweise ändert, wenn der Preis um 1% verändert wird.
3. Bestimmen Sie die Elastizität der Nachfrage bzgl. des Preises für $x = 10$ und $x = 40$.
4. Bei welcher nachgefragten Menge hat die Preiselastizität der Nachfrage den Wert –3?
5. Bestimmen Sie die Grenzen zwischen elastischem und unelastischem Bereich der Nachfragefunktion.

26.
Zwischen der Faktorgröße x und der Wirkungsgröße y bestehe folgender Zusammenhang:

$$y(x) = 225.\frac{e^{0.05x+0.08}}{x}, \quad x > 0$$

1. Bestimmen Sie die Elastizität $\varepsilon_y(x)$ von y bezüglich x im Punkt $x = 60$ und deuten Sie das Ergebnis.
2. Bestimmen Sie das größte Intervall $]a, b[$ für x, in welchem die relative Änderung von y unterproportional elastisch (unelastisch) auf die relative Änderung von x reagiert.

27.
Gegeben sei die Nachfragefunktion

$$x = f(p) = 1000e^{-2(p-1)^2}, \quad p \in [0, 5]$$

mit

$x(> 0)$: Nachfrage (ME)

p: Preis (GE)

1. Diskutieren Sie das Monotonie- und Krümmungsverhalten der Funktion $f(p)$.
2. Bestimmen Sie die absoluten Extremwerte dieser Funktion.
3. Untersuchen Sie die Elastizität der Funktion $f(p)$.

28.
Gegeben sei die Gesamtkostenfunktion K einer Ein-Produkt-Unternehmung mit

$$K(x) = 0.06x^3 - 2x^2 + 60x + 200.$$

Hier sind:

K : Gesamtkosten [GE],
x : Output [ME]

1. Ausgehend von einem Output $x = 10$ ME ermitteln Sie die *näherungsweisen* Kostenänderungen, wenn die Produktion

   i) um 2 ME ausgedehnt
   ii) um eine ME gesenkt

   wird.

2. Wie lauten die *exakten* Kostenänderungen?

29.
Gegeben sei die ertragsgesetzliche Produktionsfunktion

$$x(r) = -r^3 + 12r^2 + 30r$$

Hier sind:

r : Input [ME],
x : Output [ME_x]

Ermitteln Sie mit Hilfe des Differentials näherungsweise die Outputerhöhung, wenn – ausgehend von einer Inputmenge 11 ME – diese Inputmenge um 0.25 ME gesteigert wird.

30.
Ein Unternehmen hat die Gewinnfunktion

$$G(x) = -10x^2 + 120x - 200 .$$

Die Gesamtkostenfunktion lautet

$$K(x) = 4x^2 + 6x + 200 .$$

Dabei sind:

x : die Produktionsmenge
$K(x)$: die Kosten zur Produktion von x Produkteinheiten
$G(x)$: der Gewinn bei einer Produktion von x Produkteinheiten

1. In welchem Produktionsbereich erwirtschaftet das Unternehmen einen echten Gewinn?
2. Ermitteln Sie die gewinnmaximierende Produktionsmenge und den zugehörigen Gewinn.
3. Geben Sie die Umsatzfunktion des Unternehmens an.
4. Wie lautet die Preis-Absatz-Funktion?
5. Wie ändern sich die Gesamtkosten, wenn die Produktion, ausgehend von 5 ME, um 1% gesenkt wird?
6. Wie ändert sich der Gewinn, wenn die Produktion, ausgehend von 4 ME, auf 4.5 Einheiten erhöht wird und zwar

   i) näherungsweise
   ii) exakt.

31.
Gegeben sei die Preis-Absatz-Funktion

$$p(x) = 222 - 6x$$

eines Anbieters und dessen Kostenfunktion

$$K(x) = 293 + 159x - 12x^2 + x^3$$

Dabei sind:

p: der Preis
x: die Produktionsmenge,
$K(x)$: die Kosten zur Produktion von x Produkteinheiten.

1. Bestimmen Sie die Erlösfunktion.
2. Was lässt sich über das Monotonieverhalten der Erlösfunktion sagen?
3. Untersuchen Sie das Monotonie- und Krümmungsverhalten der Kostenfunktion. Interpretieren Sie Ihre Ergebnisse ökonomisch.
4. Für welche Produktionsmenge wird der maximale Gewinn erzielt? Wie hoch ist dieser Gewinn?
5. Bestimmen Sie die angebotene Menge, wenn bekannt ist, dass deren Steigerung um 1% zu einer Preissenkung von 1% führt. Wie lautet der entsprechende Preis?
6. Wie ändern sich die Gesamtkosten, wenn die Produktion von 40 ME auf 41 ME erhöht wird und zwar

   i) näherungsweise
   ii) exakt?

32.
Eine Unternehmung hat die Gesamtkostenfunktion:

$$K(x) = x^3 - 12x^2 + 60x + 98; \quad x \in [0;\ 13].$$

1. Untersuchen Sie die Gesamtkostenfunktion auf Monotonie.
2. Ermitteln Sie die Grenzkostenfunktion und interpretieren Sie deren Wert für $x = 7$.
3. Bestimmen Sie den Output mit minimalen *durchschnittlichen variablen* Kosten.
4. Ermitteln Sie den Output mit minimalen *Gesamtdurchschnittskosten*.
   (*Hinweis: Lösen Sie die Aufgabe graphisch!)*
5. Der Output soll sich ausgehend von 13 ME um 3 ME reduzieren. Berechnen Sie die entsprechende Kostensenkung

   i) exakt
   ii) näherungsweise.

33.
Ein Monopolunternehmen hat die Gewinnfunktion

$$G(x) = -8.4x^2 + 33.6x - 3$$

und die Kostenfunktion des Unternehmens lautet:

$$K(x) = 3.4x^2 + 6.4x + 3$$

(x: Produktionsmenge [ME]; $G(x)$: Gewinn für die Produktionsmenge x [GE]
$K(x)$: Kosten für die Produktionsmenge x [GE])

1. Ermitteln Sie die gewinnmaximale Absatzmenge und berechnen und interpretieren Sie für diese Menge die Grenzkosten.

2. Wie lauten die Umsatzfunktion $U(x)$ und die Preis-Absatz-Funktion $p(x)$ des Unternehmens?
3. Für welche Preise ist die Elastizitätsfunktion der Nachfrage bzgl. des Preises unelastisch?
4. Wie ändern sich die Gesamtkosten

   i) näherungsweise
   ii) exakt,

   wenn, die Produktion, ausgehend 5 ME, um 1% gesenkt wird?

34.
Folgende ökonomische Funktionen seien gegeben:

- Gesamtkostenfunktion: $K(x) = 0.06x^3 - x^2 + 50x + 400$
  (K: Gesamtkosten in GE; x: Output in ME)

- Produktionsfunktion: $x(r) = -\frac{1}{60}r^3 + \frac{5}{4}r^2 + 3r$
  (x: Output in ME_x; r: Input in ME_r)

- Preis-Absatz-Funktion: $p(x) = 150 - 0.4x$
  (p: Preis in GE/ME; Nachfrage in ME)

Ermitteln und interpretieren Sie

1) die Grenzkosten bei einem Output von 70 ME,
2) denjenigen Output, für den Grenzkosten und Grenzerlös übereinstimmen,
3) die Grenzproduktivität für eine Faktoreinsatzmenge von 40 ME_r,
4) die Gewinnfunktion,
5) die Elastizität des Gewinns bzgl. des Outputs bei einem Output von 70 ME.
6) den Gewinnzuwachs, wenn ausgehend von einem Output von 70 ME der Output um 3 ME gesenkt wird und zwar

   a) näherungsweise
   b) exakt.

35.
Eine Unternehmung produziere ein Gut gemäß folgender Produktionsfunktion:

$$x(r) = -0.1r^3 + 6r^2 + 12.3r, \quad r \in [0,\ 36]$$

(x: Output in ME_x; r: Input in ME_r).

Ermitteln *und* interpretieren Sie

1 die Nullstellen der Funktion.
2. die absoluten Extremwerte der Funktion.
3. die Grenzproduktivität für eine Faktoreinsatzmenge von 10 ME_r,

4. die Wendepunkte der Produktionsfunktion. Was kann man über das Krümmungsverhalten der Produktionsfunktion sagen? (Die Interpretation nicht vergessen!)
5. die Elastizität des Outputs bzgl. des Inputs bei einem Input von 10 ME_r .

36.
Ein Unternehmer habe ein Monopol auf ein bestimmtes Produkt, für das er eine Preis-Absatz-Funktion

$$p(x) = 15 - x$$

(p Stückpreis [€]; x verkaufte Menge [ME])

veranschlagt. Seine Kosten verlaufen gemäß folgender Funktion:

$$K(x) = 0.05x^3 - 0.8x^2 + 7.25x + 7.5 .$$

Ermitteln *und* interpretieren Sie

1. die Wendepunkte der Kostenfunktion. Was kann man über das Krümmungsverhalten der Kostenfunktion sagen? (Die Interpretation nicht vergessen!)
2. das Monotonieverhalten der Kostenfunktion.
3. die Produktionsmenge, für die der Gewinn des Betriebes maximal wird und den maximalen Gewinn.
4. die Grenzkosten für eine Produktion von 4 ME.
5. die Elastizität des Gewinns bezüglich einer Produktion von 4 ME.

(Letzte Aktualisierung: 23.11.14)