

# Kapitel VII

## Untersuchung von Funktionen mittels Ableitungen (Aufgaben)

### 7. 1.

Berechnen Sie folgenden Grenzwert:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$$

### 7. 2.

Untersuchen Sie die folgenden Grenzwerte:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - b^x}{x} \quad (a > 0, b > 0), \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\ln \sin x}{(\pi - 2x)^2},$$
$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{\ln x}.$$

### 7. 3.

Untersuchen Sie die folgenden Grenzwerte:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 e^{\frac{1}{x^2}}), \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{x^3 + 2x^2} - x).$$

### 7. 4.

Untersuchen Sie die folgenden Grenzwerte:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x, \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x}.$$

### 7. 5.

Untersuchen Sie das Monotonieverhalten der Funktion

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 7, \quad x \in \mathbb{R}^1.$$

### 7. 6.

Beweisen Sie die sogenannte *Bernoullische Ungleichung*

$$(1+x)^n > 1+nx \quad (n \geq 2, \text{ ganz}; x > -1, x \neq 0).$$

(Hinweis: Bestimmen Sie das Monotonieverhalten der Funktion

$$f(x) = (1+x)^n - 1 - nx \quad (x > -1).)$$

### 7. 7.

Ermitteln Sie die relativen Extremwerte der folgenden Funktionen:

a)  $f(x) = 4 \cos x + \cos 2x, \quad x \in \mathbb{R}^1,$

b)  $f(x) = x^3 e^{-x}, \quad x \in \mathbb{R}^1.$

**7. 8.**

Ermitteln Sie die relativen Extremwerte der folgenden Funktionen:

a)  $f(x) = (x+1)^5(x-2), \quad x \in \mathbb{R}^1,$

b)  $f(x) = x|x-1|, \quad x \in \mathbb{R}^1.$

**7. 9.**

Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, \quad a \neq 0.$$

Welche Werte nehmen  $a, b, c$  und  $d$ , wenn  $f$  in  $x = 4$  ein relatives Maximum und in  $x = 0$  ein relatives Minimum annimmt und die Kurve der Funktion durch die Punkte  $(0, 5)$  und  $(4, 33)$  geht?

**7. 10.**

Ermitteln Sie die absoluten Extremwerte der Funktion

$$f(x) = (x+3)^2(x-2)^3$$

auf dem Intervall  $[-2, 3]$ .

**7. 11.**

Untersuchen Sie das Krümmungsverhalten der Funktion

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}, \quad x \in \mathbb{R}^1.$$

**7. 12.**

Ermitteln Sie Wendepunkt(e) und zugehörige Wendetangente(n) der Funktion

$$f(x) = x^2 \ln x, \quad x > 0.$$

**7. 13.**

Für die folgenden Funktionen ist eine Kurvendiskussion durchzuführen und die Bildkurve zu skizzieren:

a)  $f(x) = x^2 \cdot e^{-x},$

b)  $f(x) = \sqrt[3]{x^3 + 2x^2}, \quad x \geq -2$

c)  $f(x) = \frac{x^2 + 2x - 1}{x}, \quad x \neq 0.$

*(Letzte Aktualisierung: 20.09.09)*