Kapitel IX

Das bestimmte Integral

<u>D. 9. 1</u> (*Zerlegung eines Intervalls, Integralsumme*)
Auf dem Intervall $I=[a,\ b]$ sei eine Funktion $y=f(x)$ definiert. Wählt man eine endliche Anzahl von Werten $x_1,\ x_2,...$ auf dem Intervall I mit

$$a<x_1<x_2<...<x_{n-1}<b\,,$$

so erhält man eine *Zerlegung* Z von $I=[a,\ b]$ in endlich viele Teilintervalle

$$[x_0,\ x_1],\ [x_1,\ x_2],...,\ [x_{n-1},\ x_n]$$

mit $x_0:=a,\ x_n:=b$.
Mit

$$\Delta x_i:=x_i-x_{i-1}$$

nennt man

$$\delta:=\max_{i=1,2,...,n}\Delta x_i$$

das *Feinheitsmaß der Zerlegung* Z.
Wählt man in jedem Teilintervall $[x_{i-1},\ x_i]$ einen Punkt ξ_i mit

$$x_{i-1}\le\xi_i\le x_i\,,$$

so heißt

(9. 1.) $$S(z):=\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\cdot\Delta x_i$$

die *zu der Zerlegung* Z *gehörige Integralsumme* (*auch Zerlegungs- oder Zwischensumme*).

<u>D. 9. 2.</u>
Eine Folge von Zerlegungen $Z_1,\ Z_2,...$ der Intervalle $[a,\ b]$ heißt eine *Folge von unbegrenzt feiner werdenden Zerlegungen von* $[a,\ b]$, wenn die entsprechenden Feinheitsmaße $\xi_1,\ \xi_2,...$ gegen Null konvergieren, d. h.

$$\lim_{n\to\infty}\delta_n=0\,.$$

<u>D. 9. 3</u> (*Das bestimmte Integral*)
Falls der Grenzwert

$$G := \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f\left(\xi_i\right) \cdot \Delta x_i$$

existiert, nennt man ihn *das bestimmte (Riemannsche) Integral der Funktion* $f(x)$ über dem Intervall $[a,\ b]$ und bezeichnet ihn mit dem Symbol $\int\limits_a^b f(x)dx$.

Es gilt also

(9. 2.) $$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f\left(\xi_i\right) \cdot \Delta x_i .$$

<u>D. 9. 4.</u>

1. $\int\limits_a^a f(x)dx := 0$

2. $\int\limits_a^b f(x)dx := -\int\limits_b^a f(x)dx, \quad a > b .$

<u>D. 9. 5.</u> (*Integrierbarkeit*)
Eine Funktion $f(x)$ heißt auf $[a,\ b]$ *integrierbar*, wenn der in (9. 2.) definierte Grenzwert existiert.

<u>S. 9. 1.</u>
Jede auf dem Intervall $[a,\ b]$ stetige Funktion ist auf diesem Intervall integrierbar.

<u>S. 9. 2.</u>
Jede auf dem Intervall $[a,\ b]$ stückweise stetige Funktion ist auf diesem Intervall integrierbar.

<u>S. 9. 3.</u>
Jede auf dem Intervall $[a,\ b]$ beschränkte und monotone Funktion ist auf diesem Intervall integrierbar.

<u>S. 9. 4.</u>
Ist $f(x)$ auf dem Intervall $[a,\ b]$ stückweise stetig und $c \in\ ]a,\ b[$, so gilt

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx .$$

B. 9. 1.
Der Satz S. 9. 4. bleibt auch richtig, wenn die Voraussetzung $a < c < b$ nicht erfüllt ist.
Gilt z. B. $a < b < c$ (alle anderen noch denkbaren Fälle erledigt man analog!), so folgt aus S. 9. 4. zunächst

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$$

und dann

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx - \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx\,.$$

__S. 9. 5.__
Sind $f_1(x)$ und $f_2(x)$ zwei auf $[a,\ b]$ integrierbare Funktionen, C_1 und C_2 Konstanten, so ist auch $C_1 \cdot f_1(x) + C_2 \cdot f_2(x)$ auf $[a,\ b]$ integrierbar, und es gilt

$$\int_a^b \left(C_1 \cdot f_1(x) + C_2 \cdot f_2(x)\right) dx = C_1 \cdot \int_a^b f_1(x)dx + C_2 \cdot \int_a^b f_2(x)dx$$

Beweis:

$$\begin{aligned}\int_a^b \left(C_1 \cdot f_1(x) + C_2 \cdot f_2(x)\right) dx &= \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_i \left(C_1 \cdot f_1(\xi_i) + C_2 \cdot f_2(\xi_i)\right) \cdot \Delta x_i \\ &= \lim_{\Delta x_i \to 0} \left(C_1 \cdot \sum_i f_1(\xi_i) \cdot \Delta x_i + C_2 \cdot \sum_i f_2(\xi_i) \cdot \Delta x_i \right) \\ &= C_1 \cdot \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_i f_1(\xi_i) \cdot \Delta x_i + C_2 \cdot \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_i f_2(\xi_i) \cdot \Delta x_i \\ &= C_1 \cdot \int_a^b f_1(x)dx + C_2 \cdot \int_a^b f_2(x)dx\,.\end{aligned}$$

__S. 9. 6. (__***Mittelwertsatz der Integralrechnung*****)**
Ist $f(x)$ auf $[a,\ b]$ stetig, so gibt es mindestens ein $\xi \in [a,\ b]$ mit der Eigenschaft

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a) \cdot f(\xi)\,.$$

__S. 9. 7.__
$f(x)$ und $g(x)$ seien auf $[a,\ b]$ stückweise stetig. Dann gilt

$$f(x) \le g(x),\quad \forall x \in [a,\ b] \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx\,.$$

S. 9. 8.
Sei $f(x)$ auf $[a,\ b]$ stetig. Dann gilt

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |g(x)|dx$$

S. 9. 9.
Ist $f(t)$ auf einem Intervall I stetig, a ein fester Wert aus I, so ist die auf I definierte Funktion

$$F_1(x) = \int_a^x f(t)dt$$

differenzierbar, und es gilt

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x), \quad \forall x \in I\ .$$

Beweis:
Wir haben zu zeigen, dass für jedes $x_0 \in I$ gilt

$$\lim_{x \to x_0} \frac{F_1(x) - F_1(x_0)}{x - x_0} = f(x_0)\ .$$

(Es sei zu beachten, dass der links stehende Grenzwert – falls er existiert – gleich $F_1(x_0)$ ist. Ist x_0 ein Randpunkt von I, so ist der linksseitige bzw. rechtseitige Grenzwert zu nehmen.)

$$\begin{aligned} F_1(x) - F_1(x_0) &= \int_a^x f(t)dt - \int_a^{x_0} f(t)dt \\ &= \int_a^x f(t)dt + \int_{x_0}^a f(t)dt \\ &= \int_{x_0}^a f(t)dt + \int_a^x f(t)dt \\ &= \int_{x_0}^x f(t)dt \end{aligned}$$

(Letzte Aktualisierung: 01.01.06)