Kapitel IX
Das bestimmte Integral
(Lösungen)

9. 1.

$$\int_1^5 (x^4 + x^{-2})dx = \left[\frac{x^5}{5} - \frac{1}{x}\right]_1^5 = \frac{3128}{5}.$$

9. 2.

$$\int_0^2 3\sin x dx = [-3\cdot\cos x]_0^2 = -3\cdot\cos 2 + 3 \approx 4.26.$$

9. 3.

$$\int_0^{\frac{1}{2}\sqrt{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = [\arcsin x]_0^{\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}.$$

9. 4.

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{1+x^2}. = [\arctan x]_{-1}^{1} = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

9. 5.

$$u = \sqrt{1+2x}\;; \qquad \frac{du}{dx}. = \frac{2}{2\sqrt{1+2x}} = \frac{1}{u}; \qquad dx = u\cdot du.$$

$$\begin{aligned}\int \frac{xdx}{\sqrt{1+2x}} &= \int \frac{\frac{1}{2}(u^2-1)u}{u}du \\ &= \frac{1}{2}\int (u^2-1)du = \frac{1}{2}\left(\frac{u^3}{3} - u\right) + C = \frac{u}{2}\left(\frac{u^2}{3} - 1\right) + C \\ &= \frac{\sqrt{1+2x}}{2}\cdot\left(\frac{1+2x}{3} - 1\right) + C = \frac{\sqrt{1+2x}}{3}\cdot(x-1) + C\end{aligned}$$

$$\int_0^4 \frac{xdx}{\sqrt{1+2x}}. = \left[\frac{1}{3}\sqrt{1+2x}\cdot(x-1)\right]_0^4 = \frac{10}{3}$$

9. 6.

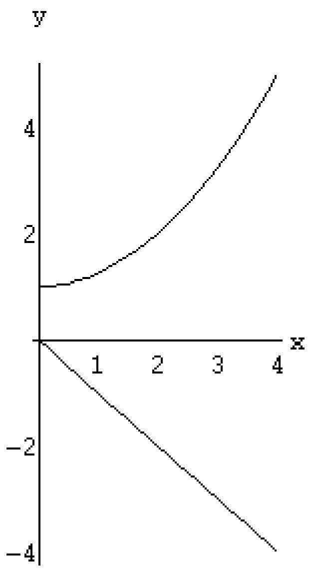
$u = \cos x$; $du = \sin x \cdot dx$,

$$\int \frac{\sin x dx}{\cos^2 x - 4} = \int \frac{-du}{u^2 - 4}. = \frac{1}{4} \int \left(\frac{1}{u+2} - \frac{1}{u-2} \right) du = \frac{1}{4} \cdot \ln|u+2| - \frac{1}{4} \cdot \ln|u-2| + C .$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x dx}{\cos^2 x - 4} = \int_1^0 \frac{\text{- du}}{\text{u}^2 - 4}. = \left[\frac{1}{4} \cdot \ln|u+2| - \frac{1}{4} \cdot \ln|u-2| \right]_0^1$$

$$= -\frac{1}{4}. \cdot \ln 3 + \frac{1}{4} \cdot \ln 1 = \frac{1}{4} \cdot \ln \frac{1}{3}.$$

9. 7.



$$A = \int_a^b \left(f(x) - g(x) \right) \cdot dx$$

$$A = \int_0^4 \left(\frac{1}{4} x^2 + 1 - (-x) \right) \cdot dx = \left[\frac{1}{12} x^3 + x + \frac{1}{2} x^2 \right]_0^4 = \frac{16}{3} + 4 + \frac{16}{2} = \frac{52}{3} .$$

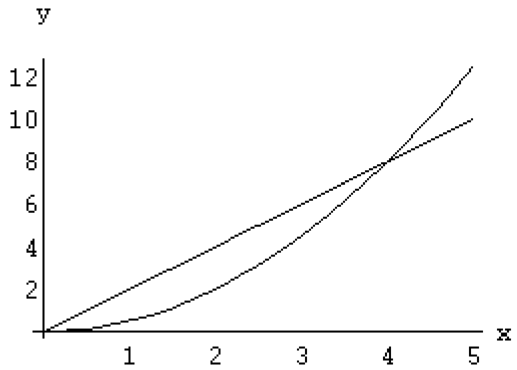
9. 8.

Die Kurven $y = \frac{1}{2} \cdot x^2$ und $y = 2x$ haben genau zwei Schnittpunkte:

$$(x_1, y_1) = (0, 0), \qquad (x_2, y_2) = (4, 8).$$

Die Kurve $y = \frac{1}{2} \cdot x^2$ verläuft auf dem Intervall $[0,\ 4]$ unterhalb der Kurve $y = 2x$. Für den Flächeninhalt des eingeschlossenen Bereichs gilt:

$$A = \int_0^4 \left(2x - \frac{1}{x} \cdot x^2 \right) \cdot dx = \left[x^2 - \frac{1}{6} x^3 \right]_0^4 = \frac{16}{3}.$$



9. 9.
Aus

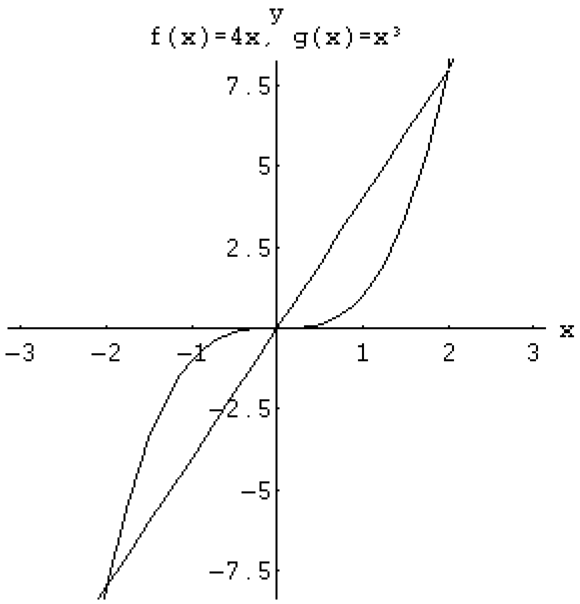
$$f(x) = 4x = x^3 = g(x)$$

folgt, dass sich die Kurven der beiden Funktionen in $x = -2,\ 0,\ +2$ schneiden.
Außerdem gilt:

$$g(x) \geq f(x), \quad \forall x[-2,\, 0] \quad \text{und} \qquad f(x) \geq g(x), \qquad \forall x[0,\ 2]\ .$$

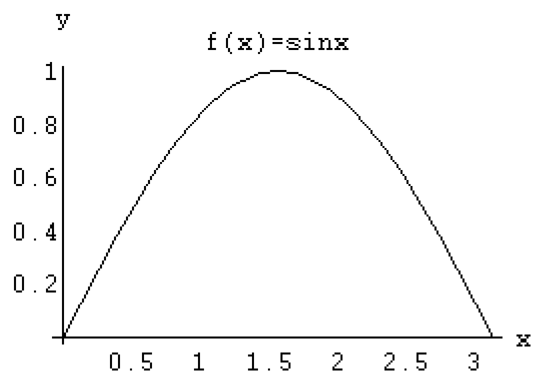
Damit gilt:

$$\begin{aligned} A &= \int_{-2}^{2} \left| f(x) - g(x) \right| dx = A_1 + A_2 \\ &= \int_{-2}^{0} \left(x^3 - 4x \right) dx + \int_0^2 \left(4x - x^3 \right) dx \\ &= \left[\frac{x^4}{4} - 2x^2 \right]_{-2}^{0} + \left[2x^2 - \frac{x^4}{4} \right]_0^2 \\ &= 0 - \left[\frac{(-2)^4}{4} - 2 \cdot (-2)^2 \right] + \left[2 \cdot (2)^2 - \frac{2^4}{4} \right] = 8\,. \end{aligned}$$

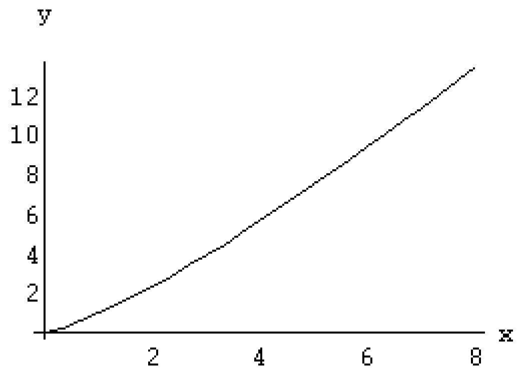


9. 10.

$$A = \int_0^{\pi} \sin x dx = [-\cos x]_0^{\pi} = -\cos \pi + \cos 0 = 2 .$$



9. 11.



$$S = \int_a^b \sqrt{1 + \left(f^{'}(x)\right)^2}\, dx$$

$$S = \int_0^8 \sqrt{1 + \frac{9}{4}}\, dx = \left[\frac{8}{27} \cdot \left(1 + \frac{9}{4} x\right) \cdot \sqrt{1 + \frac{9}{4} x} \right]_0^8 \approx 24$$

(Zur Berechnung des Integrals wurde die Substitution $u = 1 + \frac{9}{4} x$ verwendet.)

9. 12.

Streng genommen entsteht durch Rotation von $y = 2\sqrt{x}, \quad 0 \leq x \leq 9$ eine Rotationsfläche. Der Rotationskörper entsteht durch Rotation des von den Kurven $y = 2\sqrt{x}, \quad y = 0, \quad x = 9$ begrenzten Bereichs um die $x-$Achse:

$$V = \rho \cdot \int_0^9 \left(2\sqrt{x}\right)^2 dx = 162\pi$$

(Letzte Aktualisierung: 18.02.05)