Kapitel VIII

Das unbestimmte Integral

<u>D. 8. 1</u> (*Stammfunktion*)
I sei ein offenes Intervall. Vorgegeben sei eine Funktion $f(x)$, die wenigstens auf dem Intervall I definiert ist.
Dann nennt man jede Funktion $F(x)$, deren Ableitung für alle $x \in I$ gleich $f(x)$ ist, d. h.

$$F'(x) = f(x), \quad \forall x \in I$$

eine *Stammfunktion von* $f(x)$ *auf* I.

<u>S. 8. 1.</u>
Ist $F(x)$ irgendeine Stammfunktion von $f(x)$ auf I, so erhält man durch die Summe $F(x)+C$ (C: beliebige Konstante) sämtliche Stammfunktionen von $f(x)$ auf I.

Beweis:
Aus $F'(x) = f(x), \quad \forall x \in I$, folgt $(F(x)+C)' = f(x), \ \forall x \in I$.
Man muss nun umgekehrt zeigen:
Ist $F(x)$ irgendeine Stammfunktion von $f(x)$, so lässt sich jede andere Stammfunktion $F_1(x)$ von $f(x)$ in der Form $F_1(x) = F(x)+C$ darstellen. Das ist aber offensichtlich. Nach Voraussetzung gilt nämlich $F_1'(x) = f(x)$ und $F'(x) = f(x), \ x \in I$. Hieraus folgt $F_1'(x) = F'(x), \ x \in I$, also existiert nach Satz S. 6. 5. eine Konstante C, so dass gilt $F_1(x) = F(x)+C$.

<u>D. 8. 2.</u>(*Unbestimmtes Integral*)
Ist $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$ auf I, so nennt man die Summe $F(x)+C$, wobei C eine beliebig wählbare Konstante ist, *das unbestimmte Integral* von $f(x)$ auf I und bezeichnet es mit

$$\int f(x)dx .$$

Mit anderen Worten ist das unbestimmte Integral von $f(x)$ die Menge aller Stammfunktionen von $f(x)$. Es gilt:

$$\int f(x)dx = F(x)+C .$$

Die beliebig wählbare Konstante C heißt *Integrationskonstante*.

(Wegen $F'(x) = f(x)$ gilt $\frac{d}{dx}\int f(x)dx = f(x)$).

BS. 8. 1.

1)

$$\int x dx = \frac{x^2}{2} + C\,.$$

2)

$$\int (x^2 + 6x - 5) dx = \int x^2 dx + 6\int x dx - 5\int dx = \frac{x^3}{3} + 3x^2 - 5x + C\,.$$

3)

$$\int \frac{1}{x^2} dx = \int x^{-2} dx = \frac{x^{-1}}{-1} + C = -\frac{1}{x} + C\,.$$

4)

$$\int \sqrt{x} dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3} x \cdot \sqrt{x} + C, \quad x \geq 0$$

5)

$$\int \sqrt{5x+2} dx$$

$$u = 5x + 2, \qquad \frac{du}{dx} = 5, \qquad dx = \frac{1}{5}.du\,,$$

$$\int \sqrt{5x+2} dx = \int u^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{5} du = \frac{1}{5} \cdot \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot \sqrt{(5x+2)^3} + C = \frac{2}{15} \cdot \left((5x+2) \cdot \sqrt{5x+2}\right) + C$$

$$\left(x \geq -\frac{2}{5}\right)$$

6)

$$\int \frac{dx}{x+5}$$

$$u = x + 5, \qquad \frac{du}{dx} = 1, \qquad du = dx$$

$$\int \frac{dx}{x+5} = \int \frac{1}{u} du = \ln|u| + C = \ln|x+5| + C, \quad (x \neq -5)$$

S. 8. 2. (***Regel der Integration durch Substitution***)

Ersetzt man in $\int f(x) dx$ die variable x durch eine Funktion $x = \varphi(u)$, einer neuen Variablen, so gilt

(8. 1.) $$\int f(x)dx = \int f(\varphi(u))\cdot\varphi'(u)du\,|_{u=\psi(u)}\,.$$

Hierbei ist $\psi(x)$ die Umkehrfunktion von $u=\varphi(x)$.
Dabei wird vorausgesetzt, dass $\varphi'(u)$ und die Umkehrfunktion $u=\psi(x)$ existieren.

Beweis:
Es sei

(8. 2.) $$G(u) = \int f(\varphi(u))\cdot\varphi'(u)du$$

und

(8. 3.) $$F(x) = G(\psi(x))\,.$$

Formel (8. 1.) ist dann äquivalent mit der Gleichung

$$\int f(x)dx = F(x)\,.$$

Es ist also zu zeigen, dass für die so eingeführte Funktion $F(x)$ gilt: $F'(x) = f(x)$:
Nach (8. 2.) gilt:

$$G'(u) = \frac{dG}{du} = f(\varphi(u))\cdot\varphi'(u)$$

Aus (8. 3.) folgt dann

$$F'(x) = \frac{dG}{du}\cdot\frac{du}{dx} = (f(\varphi(u)\cdot\varphi'(u))\cdot\psi'(x)$$
$$= (f(\varphi(u))\cdot\varphi'(u))\cdot\frac{1}{\varphi(u)} = f(\varphi(u)) = f(x)\,.$$

<u>BS. 8. 2.</u>
Wir berechnen:
$$\int\cos(5x+1)dx\,.$$

$$f(x) = \cos(5x+1)\,,$$

$$u = 5x+1, \qquad (\psi(x) = 5x+1)$$
$$x = \frac{u-1}{5}, \qquad \left(\varphi(u) = \frac{u-1}{5}\right),$$
$$\int\cos(5x+1)dx = \int(\cos u)\cdot\frac{1}{5}du = \frac{1}{5}\int\cos u\,du$$

$$= \frac{1}{5}\sin u + C = \frac{1}{5}\sin(5x+1) + C$$

BS. 8. 3.
Wir berechnen:

$$\int \frac{x}{\sqrt{ax^2+b}}\,dx, \quad a \neq `0:$$

$$u = ax^2 + b, \qquad \frac{du}{dx} = 2ax, \qquad dx = \frac{du}{2ax},$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{ax^2+b}}\,dx = \int \frac{x}{\sqrt{u}} \cdot \frac{du}{2ax} = \frac{1}{2a}\int u^{-\frac{1}{2}}du = \frac{1}{2a} \cdot 2u^{\frac{1}{2}} + C = \frac{1}{a}\sqrt{ax^2+b} + C \; .$$

BS. 8. 4.
Wir berechnen:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}, \qquad |x| < a:$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \int \frac{dx}{a^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)} = \frac{1}{a}\int \frac{dx}{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2} \, .$$

$$\frac{x}{a} = \sin u, \qquad x = a \cdot \sin u, \qquad \frac{dx}{du} = a \cdot \cos u, \qquad dx = a \cdot \cos u \cdot du$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{1}{a}\int \frac{a \cdot \cos u du}{\sqrt{1-\sin^2 u}} = \int du = u + C = \arcsin\frac{x}{a} + C \, .$$

BS. 8. 5.
Wir berechnen:

$$\int \frac{e^x-1}{e^x+1}dx:$$

$$u = e^x, \qquad \frac{du}{dx} = e^x, \qquad dx = e^{-x}du \, ,$$

$$\int \frac{e^x-1}{e^x+1}dx = \int \frac{u-1}{u+1} \cdot \frac{du}{u} = \int\left(\frac{2}{u+1} - \frac{1}{u}\right)du = \int \frac{2}{u+1}du - \int \frac{du}{u}$$

$$= 2\ln|u+1| - \ln|u| + C \; = 2\ln\left|e^x+1\right| - \ln\left|e^x\right| + C \; = 2\ln\left(e^x+1\right) - \ln e^x + C$$

$$= 2\ln\left(e^x+1\right) - x + C \, .$$

<u>S. 8. 3.</u> (*Regel für die partielle Integration*)
Sind $u = u(x)$ und $v = v(x)$ differenzierbare Funktionen auf I und existiert das Integral $\int u'(x) \cdot v(x)dx$, dann existiert dort auch $\int u(x) \cdot v'(x)dx$, und es gilt

$$\int u(x) \cdot v'(x)dx = u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x)dx .$$

Beweis:
Wir haben zu zeigen, dass sich durch Differentiation der rechten Seite der obigen Beziehung der Integrand der des links stehenden Integrals, also $u(x) \cdot v'(x)$ ergibt:

$$\left[u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x)dx\right]' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) - u'(x) \cdot v(x) = u(x) \cdot v'(x) .$$

<u>BS. 8. 6.</u>
Wir berechnen

$$\int xe^x dx .$$

$$u(x) = x, \quad u'(x) = 1,$$

$$v'(x) = e^x, \quad v(x) = e^x ,$$

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x \cdot 1 \cdot dx = xe^x - e^x + C = e^x \cdot (x-1) + C .$$

<u>BS. 8. 7.</u>
Wir berechnen

$$\int x^2 \cdot \sin x dx .$$

$$u(x) = x^2, \quad u'(x) = 2x ,$$

$$v'(x) = \sin x, \quad v(x) = -\cos x ,$$

$$\int x^2 \cdot \sin x dx = x^2 \cdot (-\cos x) + \int 2x \cdot \cos x dx .$$

Nun berechnen wir das Integral

$$\int 2x \cdot \cos x dx .$$

$$u(x) = x \quad u'(x) = 1,$$

$$v'(x) = \cos x, \quad v(x) = \sin x ,$$

$$\int x \cdot \cos x dx = x \cdot \sin x - \int \sin x dx = x \cdot \sin x + \cos x + C_1 ,$$

$$\int x^2 \cdot \sin x dx = -x^2 \cdot \cos x + 2x \cdot \sin x + 2\cos x + C .$$

(Letzte Aktualisierung: 06.03.06)