Kapitel VII

Untersuchung von Funktionen mit Hilfe ihrer Ableitungen

S. 7. 1 (***1. Regel von Bernoulli-De-L'Hospital***)
Die Funktionen f_1 und f_2 seien in einem Intervall $]x_0,\ x_0+\delta[,\ \delta>0$, differenzierbar, und es gelte dort $f_2\,'(x)\neq 0$.
Ferner sei

$$(7.\ 1.\ )\qquad \begin{cases} \lim\limits_{x\to x_0^+} f_1(x)=0 \\ \lim\limits_{x\to x_0^+} f_2(x)=0 \end{cases}.$$

Ist $\dfrac{f_1\,'(x)}{f_2\,'(x)}$ für $x\to x_0^+$ konvergent oder bestimmt divergent, so trifft dasselbe für $\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}$ zu, und es gilt

$$(7.\ 2.\ )\qquad \lim_{x\to x_0^+}\frac{f_1(x)}{f_2(x)}=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f_1\,'(x)}{f_2\,'(x)}.$$

Beweis:
Falls f_1 und f_2 an der Stelle x_0 nicht bereits rechtsseitig stetig sind, kann man dies durch die Fortsetzung

$$f_1(x_0)=0,\quad f_2(x_0)=0$$

wegen (7. 1.) nachträglich erreichen. Das Verhalten von $\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}$ für $x\to x_0^+$ wird davon nicht beeinflusst. Nun sei $\{x_n\}$ eine gegen x_0 konvergente Folge mit $x_n\in\ ]x_0,\ x_0+\delta[$ für jedes n. Dann erfüllen f_1 und f_2 auf jedem Intervall $[x_0,\ x_n]$ die Voraussetzungen des erweiterten Mittelwertsatzes der Differentialrechnung. Es gibt also zu jedem n ein $\xi\in\ ]x_0,\ x_n[$ mit

$$(7.\ 3.\ )\qquad \frac{f_1(x_n)}{f_2(x_n)}=\frac{f_1(x_n)-f_1(x_0)}{f_2(x)-f_1(x_0)}=\frac{f_1\,'(\xi_n)}{f_2\,'(\xi_n)}.$$

Es lässt sich nun begründen, dass auch $\{\xi_n\}$ gegen x_0 konvergiert. Damit ist nach Voraussetzung $\dfrac{f_1\,'(\xi_n)}{f_2\,'(\xi_n)}$ konvergent oder bestimmt divergent.

Wegen (7. 3.) gilt dann dasselbe für $\frac{f_1(x_n)}{f_2(x_n)}$, und daraus folgt die Behauptung.

<u>S. 7. 2.</u> (*2. Regel von Bernoulli-De L'Hospital*)
Satz 7. 1. bleibt richtig, wenn (7. 1.) ersetzt wird durch die Voraussetzung

(7. 4.) $$\lim_{x \to x_0^+} f_1(x) = \pm\infty \quad \text{und} \quad \lim_{x \to x_0^+} f_2(x) = \pm\infty .$$

<u>B. 7. 1.</u>
Die Sätze S. 7. 1. und S. 7. 2. gelten sinngemäß auch für die „Bewegungen“:

$$x \to x_0^-, \quad x \to x_0^+, \quad x \to +\infty, \quad x \to -\infty .$$

<u>BS. 7. 1.</u>
Zu berechnen sei

$$\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x-1} .$$

Da der Grenzwert

$$\lim_{x \to 1} \frac{(\ln x)'}{(x-1)'} = \lim_{x \to 1} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 1$$

existiert, gilt nach S. 7. 1. unter Berücksichtigung von B. 7. 1.

$$\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{(\ln x)'}{(x-1)'} = 1 .$$

<u>BS. 7. 2.</u>
Der Grenzwert

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{\sqrt{x-1}}{\ln x}$$

ist ebenfalls vom Typ $"\frac{0}{0}"$.
Es gilt

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{\left(\sqrt{x-1}\right)'}{(\ln x)'} = \lim_{x \to 1^+} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x-1}}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to 1^+} \frac{x}{2\sqrt{x}} = +\infty ,$$

d. h.

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{\sqrt{x-1}}{\ln x} = \lim_{x \to 1^+} \frac{\left(\sqrt{x-1}\right)'}{(\ln x)'} = +\infty .$$

BS. 7. 3.
Der Grenzwert

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{e^x}$$

ist vom Typ $"\frac{+\infty}{+\infty}"$. Doch auch der Grenzwert

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\left(x^2\right)'}{\left(e^x\right)'} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{e^x}$$

ist noch von diesem Typ. Durch nochmalige Differentiation erhält man

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{(2x)'}{\left(e^x\right)'} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2}{e^x} = 0 .$$

Zweimalige Anwendung von S. 7. 2. liefert also

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{e^x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2}{e^x} = 0 .$$

BS. 7. 4.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x + \sin x}{x} \qquad \left("\frac{+\infty}{+\infty}" \right).$$

Es gilt

$$\frac{(x + \sin x)'}{(x)'} = 1 + \cos x .$$

Da aber $1 + \cos x$ für $x \to +\infty$ unbestimmt divergent ist, ist der Satz S. 2. 7. nicht anwendbar. Auf anderem Wege erhält man aber

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x + \sin x}{x} = \lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{\sin x}{x} \right) = 1 + 0 = 1 .$$

BS. 7. 5.

$$\lim_{x \to 0^+} (x \cdot \ln x) \qquad \left("0 \cdot (-\infty)" \right).$$

Es gilt

$$\ln x^x = x \cdot \ln x$$

$$\lim_{x \to 0^+} \ln x^x = \lim_{x \to 0^+} \left(x \cdot \ln \right) = 0$$

$$\lim_{x \to 0^+} x^x = e^{\lim\limits_{x \to x^+} (x \cdot \ln x)} = e^0 = 1$$

(Letzte Aktualisierung: 10.01.06)