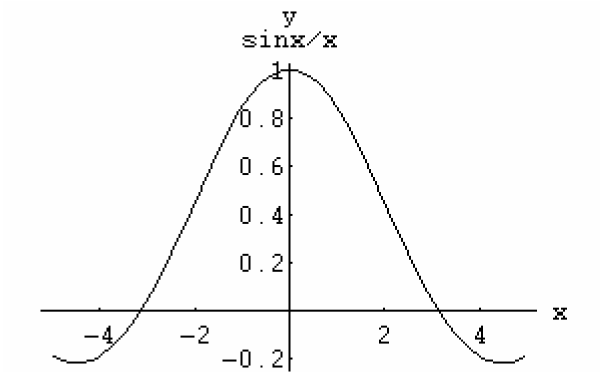
Kapitel VII
Untersuchung von Funktionen mittels Ableitungen
(Lösungen)

7. 1.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1}=\frac{1}{1}=1$$



7. 2.
a)

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-b^x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{a^x\cdot\ln a-b^x\cdot\ln b}{1}=\ln\frac{a}{b}.$$

b)

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\ln\sin x}{(\pi-2x)^2}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(-\frac{1}{4\sin x}\cdot\frac{\cos x}{\pi-2x}\right)=-\frac{1}{4}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-\frac{1}{\sin^2 x}}{-2}=-\frac{1}{8}.$$

c)

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{\ln x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2}{\frac{1}{x}}=+\infty$$

7. 3.
a)

$$\lim_{x\to 0}x^2\cdot e^{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\frac{1}{x^2}}}{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^{\frac{1}{x^2}}\right)'}{\left(\frac{1}{x^2}\right)'}=\lim_{x\to 0}e^{\frac{1}{x^2}}=+\infty$$

b)

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt[3]{x^3+2x^2}-x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3\cdot\left(1+\frac{2}{x}\right)}-x\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty} x\cdot\left(\sqrt[3]{1+\frac{2}{x}}-1\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt[3]{1+\frac{2}{x}}-1\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}=\frac{2}{3}.$$

7. 4.

a)

$$\lim_{x\to+\infty} x\cdot\ln\left(1+\frac{a}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left[\ln\left(1+\frac{a}{x}\right)\right]'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}=a,$$

also

$$\lim_{x\to+\infty}(1+\frac{a}{x})^x=e^a$$

b)

$$\lim_{x\to0^+}\sin x\cdot\ln\frac{1}{x}=-\lim_{x\to0^+}\frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{\sin x}\right)'}=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\sin x}{\cos x}\right)=1\cdot0=0\ ,$$

(Hinweis: $\ln x=-\frac{1}{\ln\frac{1}{x}}$)

also

$$\lim_{x\to0^+}(\frac{1}{x})^{\sin x}.=e^0=1.$$

7. 5.

$$f'(x)=x^2+2x=x\cdot(x+2),$$
$$f'(x)>0 \qquad\Leftrightarrow\qquad (x>0\ \wedge\ x+2>0)\ \vee\ (x<0\ \wedge\ x+2<0)$$

$$(x>0\ \wedge\ x+2>0)\ \Rightarrow\ x>0$$

$$-2<x<0$$

$$(x<0\ \wedge\ x+2<0)\ \Rightarrow\ x>0$$

$f(x)$ ist streng monoton wachsend in $]-\infty,\ -2[$ und $]0,\ +\infty[$ und streng monoton fallend in $]-2,\ 0[$.

7. 6.

$$f(x) = (1+x)^n - 1 - nx\,,$$

$$f'(x) = n \cdot (1+x)^{n-1} - n = n \cdot \left[(1+x)^{n-1} - 1\right],$$

$$f'(x) > 0\,, \qquad \text{wenn} \quad (1+x)^{n-1} > 1\,.$$

$$(n-1) \cdot \ln(1+x) > 0 \quad \text{für} \qquad x > 0\,,$$

$$(n-1) \cdot \ln(1+x) < 0 \quad \text{für} \quad -1 < x < 0\,,$$

Damit ist f auf $]-1,\ 0[$ streng monoton fallen und auf $]0,\ +\infty[$ streng monoton wachsend, d. h.

$$f(x) > f(0)\,, \quad x > -1\,, \quad x \neq 0\,.$$

7. 7.
a)

$$f'(x) = -4\sin x - 2\sin 2x = -2 \cdot (2\sin x + \sin 2x)$$

$$= -2 \cdot (2\sin x + 2\sin x \cdot \cos x)$$

$$= -4 \cdot (\sin x + \sin x \cdot \cos x)$$

$$= -4 \cdot (\sin x \cdot (1 + \cos x)).$$

Kritische Stellen:

$$x_k^{(1)} = 2 \cdot k\pi\,, \qquad x_k^{(2)} = (2k+1) \cdot \pi\,, \qquad k\,.\ \text{ganz}$$

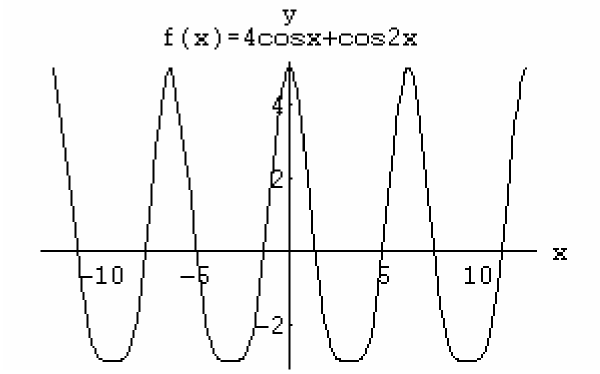
$$f''(x) = -4\cos x - 4\cos 2x$$

$$f''(x_k^{(1)}) = -8 < 0\,,$$

d.h. $f(x)$ hat bei $x_k^{(1)}$ relative Maxima mit $f\left(x_k^{(1)}\right) = 5$.
Wegen

$$f''(x_k^{(2)}) = f''(x_k^{(2)}) = 0\,, \qquad f'''(x_k^{(1)}) = 12 > 0$$

hat $f(x)$ bei $x_k^{(2)}$ relative Minima mit $f\left(x_k^{2(1)}\right) = -3$.



b)

$$f^{'}(x) = 3x^2 \cdot e^{-x} - x^3 \cdot e^{-x} = x^2 \cdot e^{x} \cdot (3-x)$$

$$f^{'}(x) := 0$$

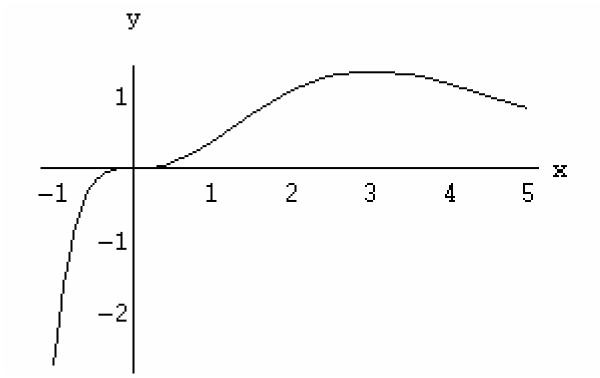
Kritische Stellen:

$$x_1 = 0, \qquad x_2 = 3.$$

$$f^{''}(x) = 6x \cdot e^{-x} - 3x^2 \cdot e^{-x} - 3x^2 \cdot e^{-x} + x^3 \cdot e^{-x}.$$

$f^{''}(0) = 0$, $\quad f^{'''}(0) \neq 0$, d.h. $f(0)$ ist kein relativer Extremwert.

$f^{''}(3) < 0$, $\quad$ d.h. $f(3) = 27e^{-3}$ ist relatives Maximum.



7. 8.
a)

$$f(x) = (x+1)^5 (x-2), \quad x \in R^1$$

$$f'(x) = 5 \cdot (x+1)^4 \cdot (x-2) + (x+1)^5 = (x+1)^4 \cdot (5x - 10 + x + 1)$$

$$= (x+1)^4 (6x-9) = 3 \cdot (x+1)^4 \cdot (2x-3))$$

$$f'(x) := 0 \qquad \Rightarrow \qquad x = -1, \qquad\qquad x = \frac{3}{2},$$

$$f''(x) = 3 \cdot \left[4 \cdot (x+1)^3 \cdot (2x-3) + 2 \cdot (x+1)^4\right]$$

$$= 30 \cdot (x+1)^3 \cdot (x-1)$$

$$f''(-1) = 0$$

$$f'''(x) = 30 \cdot \left[3 \cdot (x+1)^2 \cdot (x-1) + (x+1)^3\right] = 60 \cdot (x+1)^2 \cdot (2x-1)$$

$$f'''(-1) = 0$$

$$f^{(4)} = 240 \cdot (x+1), \qquad\qquad f^{(4)}(-1) = 0$$

$$f^{(5)} = 240 \neq 0,$$

d.h. $f(-1)$ ist *kein* (relativer) Extremwert.

Andererseits ist wegen

$$f''\left(\frac{3}{2}\right) = 30 \cdot \left(\frac{3}{2}+1\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{2}-1\right) > 0$$

$f\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{5^5}{2^6}$ ein relatives Minimum.

b)

$$f(x) = \begin{cases} x \cdot (x-1) & \textit{für} \quad x > 1 \\ x \cdot (-x+1) & \textit{für} \quad x < 1 \end{cases} \quad ; \qquad f'(x) = \begin{cases} 2x-1 & \textit{für} \quad x > 1 \\ -2x+1 & \textit{für} \quad x < 1 \end{cases}.$$

$$f'(x) := 0 \qquad \Rightarrow \qquad x = \frac{1}{2}, \qquad\qquad x = 1.$$

In $x = 1$ ist die Funktion nicht differenzierbar, aber wegen

$$\lim_{x \to 1^-}(-2x+1) < 0 \qquad \text{und} \qquad \lim_{x \to 1^+}(2x-1) > 0$$

ist $f(1) = 0$ ein relatives Minimum.

Ferner ist $f''(x) = -2 < 0$ für $x < 1$. Daher ist $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$ ein relatives Maximum.

7. 9.

$$f(0)=5 \quad \Rightarrow \quad d=5$$

$$f(4)=33 \quad \Rightarrow \quad 64a+16b+4c=28$$

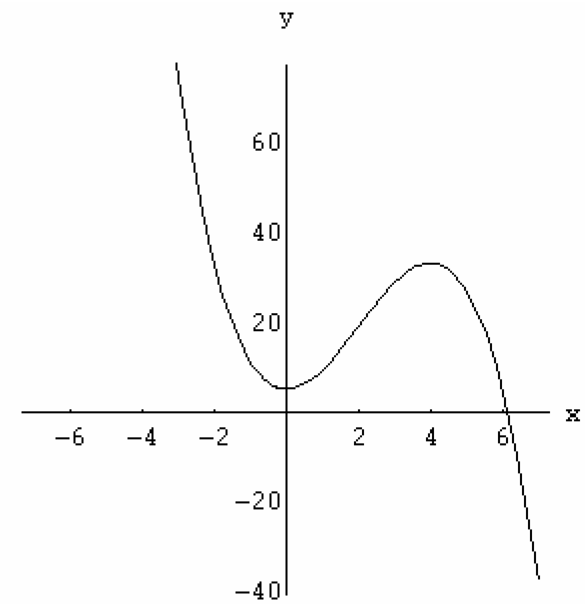
$$f^{'}(x)=3ax^2+2bx+c;$$

$$f^{'}(0)=0\ , \quad f^{'}(4)=0 \ \Rightarrow \ c=0, \qquad 48a+8b=0$$

$$\begin{cases} 6a+b=0 \\ 16a+4b=7 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad a=-\frac{7}{8}, \quad b=\frac{21}{4}\ .$$

Damit erhält man

$$f(x)=-\frac{7}{8}\cdot x^3\ \frac{21}{4}\cdot x^2+5$$



7. 10.

$$f'(x)=2\cdot(x+3)\cdot(x-2)^3+3\cdot(x-2)^2\cdot(x+3)^2$$

$$=(x+3)\cdot(x-2)^2\cdot(2x-4+3x+9)$$

$$=5\cdot(x+3)\cdot(x-2)^2\cdot(x+1)$$

Kritische Stellen in $]-2,\ 3\ [$: $\qquad x_1=-1, \qquad x_2=2$

$$f^{''}(x)=5\cdot\left[(x-2)^2\cdot(x+1)+2\cdot(x+3)\cdot(x-2)\cdot(x+1)+(x+3)\cdot(x-2)^2\right]$$

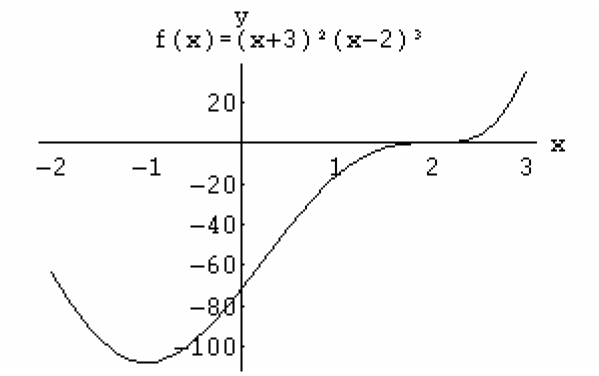
$f''(-1) > 0 \;\Rightarrow\; f(x)$ nimmt in $x_1 = -1$ ein relatives Minimum an mit $f(-1) = -108$

$f''(2) = 0$

Wegen $\lim\limits_{x \to 2^-} f(2) > 0$ und $\lim\limits_{x \to 2^+} f(2) > 0$ nimmt $f(x)$ in $x_2 = 2$ kein relatives Extremum an.

$f(-2) = -64$; $\qquad f(3) = 36$.

Damit nimmt $f(x)$ in $x = 3$ das absolute Maximum und in $x = -1$ das absolute Minimum an:



7. 11.

$$f(x) = \frac{x}{x^2+1}, \qquad x \in R^1.$$

$$f'(x) = \frac{x^2+1-2x^2}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{1-x^2}{\left(x^2+1\right)^2}, \qquad x \in R^1$$

$$f''(x) = \frac{-2x\cdot\left(x^2+1\right)^2 - 4x\cdot\left(x^2+1\right)\cdot\left(1-x^2\right)}{\left(x^2+1\right)^4} = \frac{2x\cdot\left(x^2-3\right)}{\left(x^2+1\right)^3}, \qquad x \in R^1$$

$$f''(x) = \frac{2x\cdot\left(x^2-3\right)}{\left(x^2+1\right)^3}\begin{cases} < 0 & \textit{für} \quad x \in \left]-\infty, -\sqrt{3}\right[\cup \left]0, \sqrt{3}\right[\\ > 0 & \textit{für} \quad x \in \left]-\sqrt{3}, 0\right[\cup \left]\sqrt{3}, +\infty\right[\end{cases}$$

f ist auf $\left]-\infty, -\sqrt{3}\right[\cup \left]0, \sqrt{3}\right[$ streng konkav und auf $\left]-\sqrt{3}, 0\right[\cup \left]\sqrt{3}, +\infty\right[$ streng konvex.

7. 12.

$$f'(x) = 2x\cdot\ln x + \frac{1}{x}\cdot x^2 = 2x\cdot\ln + x$$

$$f''(x) = 2\cdot\ln x + \frac{1}{x}\cdot 2x + 1 = 2\cdot\ln x + 3$$

$$2\cdot\ln x + 3 = 0, \qquad \ln x = -\frac{3}{2}, \qquad x = e^{-\frac{3}{2}}.$$

$f(x)$ hat in $\left(e^{-\frac{3}{2}},\, f(e^{-\frac{3}{2}})\right) = \left(e^{-\frac{3}{2}}, -\frac{3}{2}e^{-3}\right)$ einen Wendepunkt.

7. 13.
a)

1. Definitionsbereich

f ist definiert auf R^1.

2. Stetigkeit

f ist stetig auf R^1.

3. Symmetrie

$f(-x) = (-x)^2 \cdot e^{-(-x)} = x^2 \cdot e^x \neq x^2 \cdot e^{-x} = f(x) \quad \Rightarrow \quad$ keine gerade Funktion.

$-f(-x) = -x^2 \cdot e^x \neq x^2 \cdot e^{-x} = f(x) \qquad \Rightarrow \quad$ keine ungerade Funktion.

4. Schnittpunkte mit den Achsen

$x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = 0$

5. Monotonie
Wegen

$$f'(x) = x \cdot (2-x) \cdot e^{-x} \begin{cases} > 0 & \textit{für} \quad 0 < x < 2 \\ < 0 & \textit{für} \quad x < 2 \text{ und für } x > 2 \end{cases}$$

ist f auf $]0, 2[$ streng monoton wachsend und auf $]-\infty, 0[\cup]2, +\infty[$ streng monoton fallend.

6. Extremwerte
Nach den Ergebnissen der Monotonieuntersuchung hat f das relative Minimum $f(0) = 0$ und das relative Maximum $f(2) = 4e^{-2} \approx 0.54$.

7. Krümmungsverhalten und Wendepunkte
Es gilt

$$f'''(x) = \left(x^2 - 4x + 2\right) \cdot e^{-x}.$$

Das Polynom $\left(x^2 - 4x + 2\right)$ hat die Nullstellen:

$x_1 = 2 - \sqrt{2} \approx 0.59, \qquad x_1 = 2 + \sqrt{2} \approx 3.41.$

Daher ist

$$f'''(x) = (x - x_1)\cdot(x - x_2)\cdot e^{-x}\begin{cases} > 0 & \textit{für} \quad x < x_1 \text{ und für } x > x_2 \\ < 0 & \textit{für} \quad x_1 < x < x_3 \end{cases}.$$

Somit ist f auf $]-\infty, x_1[\cup]x_2, +\infty[$ streng konvex und auf $]x_1, x_2[$ streng konkav. f hat die Wendepunkte $P_1(x_1, f(x_1))$ und $P_2(x_2, f(x_2))$. Dabei ist $f(x_1) \approx 0.19$ und $f(x_2) \approx 0.38$.

8. Das Verhalten im Unendlichen und Asymptoten

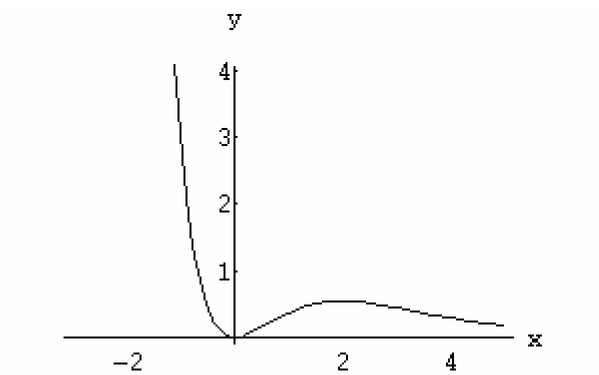
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{(x^2)'}{(e^x)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(2x)'}{(e^x)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{e^x} = 0\,.$$

Für $x \to +\infty$ hat f also die Asymptote $y = 0$. Dagegen hat f wegen

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} x\cdot e^{-x} = -\infty$$

für $x \to -\infty$ keine Asymptote.



b)
1. Definitionsbereich

f ist definiert auf $[-2, +\infty[$.

2. Stetigkeit

f ist stetig auf $[-2, +\infty[$.

3. Symmetrie

$$f(-x) = \sqrt[3]{(-x)^3 + 2\cdot(-x)^2} = \sqrt[3]{-x^3 + 2x^2} \neq \sqrt[3]{x^3 + 2x^2} = f(x)$$

$\Rightarrow$ keine gerade Funktion.

$-f(-x) = -\sqrt[3]{-x^3 + 2x^2} \neq \sqrt[3]{x^3 + 2x^2} = f(x) \quad \Rightarrow$ keine ungerade Funktion.

4. Schnittpunkte mit den Achsen

i) mit der $y-Achse$:

$$x = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 0$$

ii) $x-Achse$:

$$y = 0 \quad \Rightarrow \quad x^3 + 2x^2 = 0, \qquad x_1 = -2, \qquad x_2 = 0.$$

5. Monotonie
Wegen

$$f'(x) = \frac{x\cdot(3x+4)}{3\cdot\left(\sqrt[3]{x^3+2x^2}\right)^2}\begin{cases} < 0 & für \quad -\frac{4}{3} < x < 0 \\ > 0 & für \quad -2 < x < -\frac{4}{3} \text{ und für } x > 0 \end{cases}$$

ist f auf $]-2, -\frac{4}{3}[$ streng monoton wachsend und auf $]-\frac{4}{3}, 0[$ streng monoton fallend.
(Die Funktion f ist in $x = 0$ nicht differenzierbar!)

6. Extremwerte
Nach den Ergebnissen der Monotonieuntersuchung hat f das relative Minimum $f(0) = 0$ und das relative Maximum $f\left(-\frac{4}{3}\right) = \frac{2}{3}\cdot\sqrt[3]{4} \approx 1.06$.
Eine weitere kritische Stelle der Funktion f ist die Stelle $x = -2$. Wegen $f(-2) = 0$ nimmt die Funktion auch hier ein relatives Minimum an, obwohl f in $x = -2$ lediglich linksseitig differenzierbar ist.

7. Krümmungsverhalten und Wendepunkte
Es gilt

$$f''(x) = -\frac{8}{9\cdot(x+2)\cdot\sqrt[3]{\left(x^3+2x^2\right)^2}}, \qquad x > -2, \quad x \neq 0,$$

also $f''(x) < 0$ für $-2 < x < 0$ und für $x > 0$.
Somit ist f auf $]-2, 0[\cup]0, +\infty[$ streng konkav.
f hat keine Wendepunkte.

8. Das Verhalten im Unendlichen und Asymptoten
Es gilt

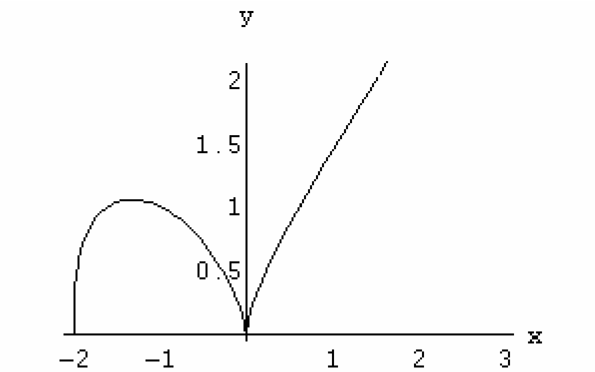
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{x^3\cdot\left(1+\frac{2}{x}\right)}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{1+\frac{2}{x}}=1$$

$$.\ \lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-1\cdot x\right]=\frac{2}{3}\quad\text{(Siehe 7. 3. b))}$$

Daher ist die Gerade

$$y=x+\frac{2}{3}$$

Asymptote von f für $x\to+\infty$.



c)

$$f(x)=\frac{x^2+2x-1}{x},\ x\neq 0\,.$$

1. Definitionsbereich

$$D(f)=R^1\setminus\{0\}\,.$$

Es gilt

$$x\to 0^- \quad\Rightarrow\quad f(x)\to+\infty$$

$$x\to 0^+ \quad\Rightarrow\quad f(x)\to-\infty\,.$$

Damit ist die Gerade $x=0$ eine vertikale Asymptote der Funktion.

2. Stetigkeit
$f(x)$ ist stetig in $D(f)$.

3. Symmetrie

$$f(x) \overset{?}{=} f(-x), \ \forall x \in D(f).$$

Nein, denn

$$f(-x) = \frac{(-x)^2 - 2x - 1}{-x} \neq f(x).$$

Damit ist die Funktion keine gerade Funktion.

$$f(x) \overset{?}{=} - f(-x), \ \forall x \in D(f).$$

Nein, denn

$$-f(-x) = \frac{-x^2 + 2x + 1}{-x} \neq f(x).$$

Damit ist die Funktion auch keine ungerade Funktion.

4. Schnittpunkte mit den Achsen
Wegen $x \neq 0$ gibt es keine Schnittpunkte mit der $y-$Achse. Andererseits gilt:

$$\frac{x^2 + 2x - 1}{x} = 0 \ \Leftrightarrow \ x^2 + 2x - 1 = 0 \ \ \Leftrightarrow \ x_1 = -2 - \sqrt{2} \ \vee \ x_2 - 2 + \sqrt{2}.$$

5. Monotonie

$$f'(x) = \frac{(2x+2) \cdot x - (x^2 + 2x - 1)}{x^2} = \frac{x^2 + 1}{x^2}.$$

Wegen $f'(x) > 0, \ \forall x \in D(f),$ ist $f(x)$ im gesamten Definitionsbereich streng monoton wachsend.

6. Extrema
Wegen $f'(x) \neq 0$ hat die Funktion keine Extremwerte.

7. Krümmungsverhalten

$$f''(x) = \frac{2x \cdot x^2 - 2x \cdot \left(x^2 + 1\right)}{x^4} = -\frac{2}{x^3}.$$

$$f''(x)\begin{cases} <0 & \text{für} \quad x>0 \\ >0 & \text{für} \quad x<0 \end{cases}.$$

Damit ist $f(x)$ konvex in $]-\infty,\ 0[$ und konkav in $]0,\ +\infty[$. Es gibt aber wegen $x \neq 0$ keine Wendepunkte.

8. Das Verhalten im Unendlichen und Asymptoten
Die Funktion hat eine schiefe Asymptote

$$y = ax + b$$

$$a = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$a = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+2x-1}{x^2} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}\right) = 1$$

$$b = \lim_{x\to\infty}(f(x) - a\cdot x))$$

$$b = \lim_{x\to\infty}(f(x) - a\cdot x)) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2x-1}{x}-1\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2x-1-x^2}{x}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(2-\frac{1}{x}\right) = 2$$

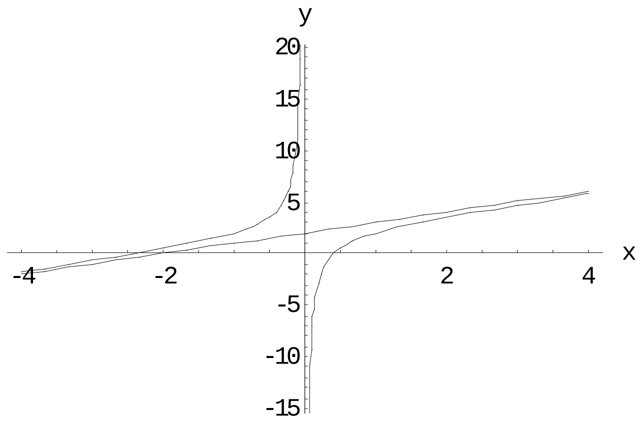
Die Gleichung der schiefen Asymptote lautet:

$$y = x + 2\,.$$

Wegen $f(x) = \dfrac{x^2+2x-1}{x} = x + 2 - \dfrac{1}{x}$ gilt:

$$x \to -\infty \quad \Rightarrow \quad f(x) \to -\infty$$

$$x \to +\infty \quad \Rightarrow \quad f(x) \to +\infty\,.$$



(Letzte Aktualisierung: 21.02.05)