Kapitel VI

Eigenschaften differenzierbarer Funktionen

S. 6. 1. (Fermat, 1601 - 1665)
Die Funktion f sei auf dem Intervall I definiert und nehme an der inneren Stelle ξ von I einem absoluten Extremum an.
Ist f an der Stelle ξ differenzierbar, dann gilt $f'(\xi) = 0$.

S. 6. 2. (Rolle, 1652 - 1719)
Die Funktion f sei auf $[a,\ b]$ stetig und auf $]a,\ b[$ differenzierbar. Ferner sei $f(a) = f(b)$.
Sann existiert (mindestens) ein $\xi \in \,]a,\ b[$ mit $f'(\xi) = 0$.

Beweis:
Nach dem Satz von Weierstraß hat f auf $[a,\ b]$ ein absolutes Minimum m_1 und ein absolutes Maximum m_2. Wir unterscheiden zwei Fälle:

1. $m_1 = m_2$
Dann ist f auf $[a,\ b]$ konstant, also $f'(\xi) = 0$ für jedes $\xi \in \,]a,\ b[$.

2. $m_1 \neq m_2$
Dann nimmt f wegen $f(a) = f(b)$ mindestens einen der beiden absoluten Extrema an einer inneren Stelle ξ von $[a,\ b]$ an. Nach Satz S. 6. 1. ist dann aber $f'(\xi) = 0$.

B. 6. 1.
Offenbar kann man den Satz von Rolle auf folgendermaßen geometrisch interpretieren:
Unter den gegebenen Voraussetzungen über die Funktion f gibt es mindestens eine Tangente an der Bildkurve f, die zu der Sekante durch die Punkte $(a,\ f(a))$ und $(b,\ f(b))$ parallel ist, die also denselben Anstieg wie diese Sekante hat.
Der folgende wichtige Satz besagt nun geometrisch, dass diese Aussagen auch dann gelten, wenn die Sekante nicht notwendig horizontal verläuft.
Man beachte:
Der Anstieg der Sekante s ist $\dfrac{f(b) - f(a)}{b-a}$, der Anstieg der Tangente t ist $f'(\xi)$.

S. 6. 1. (*Mittelwertsatz der Differentialrechnung*)
Die Funktion f sei auf $[a,\ b]$ stetig und auf $]a,\ b[$ differenzierbar. Dann existiert (mindestens) eine Stelle ξ mit

(6. 1.)
$$\frac{f(b) - f(a)}{b-a} = f'(\xi), \quad \xi \in \,]a,\ b[.$$

Beweis:
Es sei f_s diejenige Funktion, deren Bildkurve sie Sekante s ist, also

$$f_s(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b-a} \cdot (x-a).$$

Die Funktion

$$\varphi(x) = f(x) - f_s(x)$$

genügt $\xi \in \left]a,\ b\right[$ dann auch $\left[a,\ b\right]$ des Voraussetzungen des Satzes von Rolle. Daher existiert eine Zahl $\xi \in \left]a,\ b\right[$ mit

$$0 = \varphi'(\xi) = f'(\xi) - f_s'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a}.$$

Damit ist der Satz bewiesen.

B. 6. 2.
Setzt man $x_0 = a,\ h = b-a,$ also $x_0 + h = b$, so kann man jedes $\xi \in \left]a,\ b\right[= \left]x_0,\ x_0+h\right[$ offenbar in der Form

$$\xi = \upsilon\left(x_0 + h\right) + \left(1-\upsilon\right)x_0$$

$$= x_0 + \upsilon h, \quad \upsilon \in \left]0,\ h\right[$$

schreiben.
Damit kann man statt (6. 1.) auch schreiben:

(6. 2.) $$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0 + \upsilon h), \quad \upsilon \in \left]a,\ b\right[$$

oder

(6. 3.) $$f(x_0+h) - f(x_0) = h \cdot f'(x_0 + \upsilon h), \quad \upsilon \in \left]a,\ b\right[$$

oder

(6. 4.) $$f(x_0+h) = f(x_0) + h \cdot f'(x_0 + \upsilon h), \quad \upsilon \in \left]a,\ b\right[.$$

Es sei bemerkt, dass (6. 3.) für kleines $|h|$ in

(6. 5.) $$f(x_0+h) - f(x_0) \approx h \cdot f'(x_0)$$

übergeht.

BS. 6. 1.
Sei

$$f(x) = cx^2, \quad c \neq 0: \text{ Konstante}.$$

Offenbar erfüllt f für jedes Intervall $[x_0,\ x_0 + h]$ die Voraussetzungen des Mittelwertsatzes. Es gibt also mindestens ein υ, so dass (6. 2.) gilt, d.h.

$$\frac{c \cdot (x_0 + h)^2 - cx_0^2}{h} = 2c \cdot (x_0 + \upsilon h), \quad \upsilon \in \left]a,\ b\right[.$$

BS. 6. 2.
Aus einer fünfstelligen Tafel nimmt man den Wert $\ln 17 = 2.83321$. Gesucht ist ein Näherungswert für $\ln 17.2$.
Wegen $\ln 17.2 = \ln(17 + 0.2)$ wenden wir den Mittelwertsatz auf die Funktion

$$f(x) = \ln x$$

mit $x_0 = 17,\ h = 0.2,\ f'(x) = \dfrac{1}{x}$ an.
Für beliebiges x_0 und h gilt

$$\ln(x_0 + h) = \ln x_0 + \frac{h}{x_0 + \upsilon h}, \quad \upsilon \in \left]0,\ 1\right[\qquad (\because\ (6.\ 4.))$$

(6. 6.) $$\ln 17.2 = \ln 17 + \frac{0.2}{17 + 0.2\upsilon}, \quad \upsilon \in \left]0,\ 1\right[.$$

Wegen $\upsilon \in \left]0,\ 1\right[$ gilt

(6. 7.) $$\frac{0.2}{17 + 0.2 \cdot 1} < \frac{0.2}{17 + 0.2 \cdot \upsilon} < \frac{0.2}{17 + 0.2 \cdot 0}.$$

Aus (6. 6.) folgt

(6. 8.) $$\ln 17 + \frac{0.2}{17.2} < \ln 17.2 < \ln 17 + \frac{0.2}{17}.$$

In $\ln 17 = 2.83321$ ist die 5. Stelle nach dem Komma gerundet, es gilt also genauer

(6. 9.) $$2.833205 \leq \ln 17 < 2.833215.$$

Ferner ist

(6. 10.) $$\frac{0.2}{17.2} = 0.011627... > 0.011627$$

(6. 11.) $$\frac{0.2}{17} = 0.011764\ ... < 0.011765$$

Aus (6. 8.) folgt mit (6. 9.) – (6. 11.) schließlich

$$2.833205 + 0.011627 < \ln 17.2 < 2.833215 + 0.011765,$$

also

$$2.844832 < \ln 17.2 < 2.844980,$$

oder bei Rundung auf drei Stellen nach dem Komma

$$\ln 17.2 = 2.845.$$

S. 6. 4.
Die Funktion f sei auf dem Intervall I stetig und an jeder inneren Stelle x von I differenzierbar mit $f'(x) = 0$. Dann ist f auf I konstant.

Beweis:
Wir wählen eine beliebige Zahl $a \in I$. Zu jedem $x \in I,\ x \neq a,$ gibt es dann nach dem Mittelwertsatz, angewandt auf das Intervall $[a,\ x]$ eine im Inneren dieses Intervalls gelegene Zahl ξ mit

$$f(x) - f(a) = (x - a) \cdot f'(\xi).$$

Wegen $f'(\xi) = 0$ folgt daraus $f(x) = f(a)$. Da $x \in I$ beliebig war, hat f auf I den konstanten Wert $f(a)$ auf I.

S. 6. 5.
Die Funktion f und g seien auf I stetig und an jeder inneren Stelle x von I differenzierbar mit $f'(x) = g'(x)$. Dann unterscheiden sich f und g auf I nur um eine additive Konstante.

Beweis:
Die Funktion

$$\varphi(x) := f(g) - g(x),\ x \in I$$

erfüllt die Voraussetzungen des Satzes S. 6. 4. Folglich gibt es eine Zahl C mit

$$C = \varphi(x) = f(g) - g(x),\ x \in I.$$

S. 6. 6.
Die Funktion f und g seien auf $[a,\ b]$ stetig und auf $]a,\ b[$ differenzierbar. Ferner sei $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in\ ]a,\ b[$.
Dann existiert mindestens eine Stelle ξ mit

(6. 12.) $$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}, \quad \xi \in\ ]a,\ b[.$$

B. 6. 3
Es sei bemerkt, dass die linke Seite von (6. 12.) sinnvoll ist: Nach Satz S. 6. 3., angewandt auf g, existiert nämlich ein $\tilde{\xi} \in \,]a,\ b[$ mit

$$\frac{g(b)-g(x)}{b-a} = g'(\tilde{\xi})$$

und wegen $g'(\tilde{\xi}) \neq 0$ folgt daraus $g(b)-g(a) \neq 0$.

S. 6. 7. ***(Taylor-sche Formel für ganze rationale Funktionen)***
Es sei g eine ganze rationale Funktion $n-$ten Grades:

(6. 13.) $$g(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n, \quad a_n \neq 0,\ a_k \in R^1,\ k = 1,2,...,n\,.$$

Mit einer beliebigen reellen Zahl x_0 lässt sich $g(x)$ nach Potenzen von $(x-x_0)$ entwickeln:

(6. 14.) $$g(x) = c_0 + c_1(x-x_0) + c_2(x-x_0)^2 + ... + c_n(x-x_n)^n, \quad c_n \neq 0\,.$$

Dabei gilt

(6. 15.) $$c_k = \frac{g^{(k)}(x_0)}{k!}, \quad k = 0,\ 1,...,n\,.$$

Beweis:
Es gilt für die Ableitungen von (6. 14.):

$$g'(x) = c_1 + 2c_2(x-x_0) + ... + n \cdot c(x-x_0)^{n-1}$$

$$g''(x) = 2c_2 + ... + n\cdot(n-1)\cdot c_n(x-x_0)^{n-2}$$

.
.
.

$$g^{(n)}(x) = n\cdot(n-1)...2\cdot 1\cdot c_n = n!c_n$$

und speziell für $x = x_0$:

$$g(x_0) = c_0$$

$$g'(x_0) = c_1 = 1!c_1$$

$$g''(x_0) = 2c_2 = 2!c_2$$

.
.
.

$$g^{(n)}(x_0) = n!c_n\,,$$

d. h.

$$c_0 = g(x_0)$$

$$c_1 = \frac{g'(x_0)}{1!}$$

(6. 16.) $$c_2 = \frac{g''(x_0)}{2!}$$

$$\vdots$$

$$c_n = \frac{g^{(n)}(x_0)}{n!}$$

und damit gilt die Behauptung (6. 15.).

B. 6. 4.
Ist

(6. 17.) $$g(x) = \tilde{c}_0 + \tilde{c}_1(x-x_0) + \tilde{c}_2(x-x_0)^2 + ... + \tilde{c}_n(x-x_n)^n, \quad \tilde{c}_n \neq 0$$

eine andere Darstellung von $g(x)$, dann gilt auch

$$\tilde{c}_k = \frac{g^{(k)}(x_0)}{n!}, \quad k = 0,1,...,n$$

und daher mit (6. 16.)

$$\tilde{c}_k = c_k, \quad k = 0,1,...,n\,.$$

Speziell für $x_0 = 0$ folgt damit der folgende Satz:

S. 6. 8. (***Methode des Koeffizientenvergleichs***)
Ist neben (6. 13.) auch

$$g(x) = \tilde{a}_0 + \tilde{a}_1 x + \tilde{a}_2 x^2 + ... + \tilde{a}_n x^n, \quad \tilde{a}_n \neq 0$$

eine Entwicklung von $g(x)$, dann gilt

$$\tilde{a}_k = a_k, \quad k = 0,1,...,n$$

(*Letzte Aktualisierung: 06.01.06*)