Kapitel VI

Eigenschaften differenzierbarer Funktionen (Lösungen)

6. 1.

$$\frac{e^{x_0+h}-e^{x_0}}{h}=e^{x_0+\upsilon\cdot h} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{e^h-1}{h}=e^{\upsilon\cdot h} \quad \Leftrightarrow \quad \upsilon=\frac{1}{h}\ln\frac{e^h-1}{h}.$$

6. 2.
Mit

$$e^{x_0+h}=e^{x_0+\upsilon\cdot h}, \quad x_0=1, \quad h=0.01$$

folgt wegen $0<\upsilon<1$

$$e+0.01\cdot e<e^{1.01}<e+0.01\cdot e^{1.01}$$

und daraus

$$2.7454<1.01\cdot e<e^{1.01}<\frac{e}{0.99}<2.7459.$$

6. 3.
Da die Funktion $f(x)=x^3-x$ ein Polynom ist, ist sie in $[0,\ 1]$ steig und in $]0,\ 1[$ differenzierbar. Außerdem gilt $f(0)=f(1)=0$. Damit erfüllt $f(x)=x^3-x$ alle Voraussetzungen des Satzes von Rolle.
Aus

$$f'(x)=3x^2-1=\left(\sqrt{3}x-1\right)\cdot\left(\sqrt{3}x+1\right)$$

folgt:

$$f'\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=f'\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=0.$$

Wegen $\frac{1}{\sqrt{3}}\in]0,\ 1[$ gilt $c=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

6. 4.
Wegen

$$f'(x)=3x^2-3 \qquad \text{und} \qquad \frac{f(2)-f(0)}{2-0}=\frac{3-1}{2}=1$$

folgt

$$3c^2 - 3 = 0$$

oder

$$c = \pm \frac{2}{\sqrt{3}}$$

und wegen $c \in [0,\quad 2]$ nur

$$c = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

6. 5.
Aus

$$f'(x) = \frac{1}{x \cdot \sqrt{x^2 - 1}} = g'(x) \qquad (x > 1)$$

folgt

$$f(x) - g(x) = C \qquad (x \geq 1).$$

Speziell $x = 1$: $(x > 1)$. $-\frac{\pi}{2} - 0 = C.$

Also $\arcsin\frac{1}{x} + \arctan x\sqrt{x^2 - 1} = \frac{\pi}{2} \quad (x \geq 1).$

6. 6.

	2	-2	0	1	-7	-4
		6	12	36	111	312
3	2	4	12	37	104	$308 = g(3)$

6. 7.

	1	0	-19	-6	72
		-3	9	30	-72
-3	1	-3	-10	24	$0 = g(-3)$
		-3	18	-24	
-3	1	-6	8	$0 = g'(-3)$	
		-3	27		
-3	1	-9	$35 = \frac{g''(-3)}{2!} \neq 0$		

x_0 ist eine 2-fache Nullstelle von g, und es gilt

$$g(x) = (x+3)^2 \cdot (x^2 - 6x + 8)$$

6. 8.

	3	0	1	-5	2
		6	12	26	42
2	3	6	13	21	$4 = g(2)$
		6	24	74	
2	3	12	37	$95 = g'(2)$	
		6	36		
2	3	18	$73 = \frac{g''(2)}{2!}$		
		6			
2		$24 = \frac{g'''(2)}{3!}$			
	$3 = \frac{g^{(4)}(2)}{4!}$				

$$g(x) = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{g^{(\nu)}(x_0)}{\nu!}(x - x_0)^\nu + R_n(x)$$

$$R_n(x) = \frac{g^{(n+1)}(x_0 + \vartheta(x - x_0))}{(n+1)!} \cdot (x - x_0)^{n+1}, \qquad (0 < \vartheta < 1)$$

$$g(x) = 44 + 95 \cdot (x-2) + \left[18 \cdot (2 + \vartheta(x-2))^2 + 1\right] \cdot (x-2)^2; \quad (0 < \vartheta < 1)$$

6. 9.

$$\sin^2 x = x^2 - \frac{1}{3} x^4 + R_5(x)$$
$$R_5(x) = \frac{2\cos(2\upsilon x)}{45} \cdot x^6,$$

also

$$\left| R_5(x) \le \frac{2}{45} \right| \cdot x^6 .$$

(Letzte Aktualisierung: 14.02.05)