Kapitel VI

Eigenschaften differenzierbarer Funktionen (Aufgaben)

6.1.
Bestimmen Sie alle $\upsilon \in \left]0,\ 1\right[$, so dass die Tangente an die Kurve $y = e^x$ an der Stelle

$$\xi = x_0 + \upsilon \cdot h$$

parallel zu der zum Intervall $[x,\ x_0 + h]$ gehörige Sekante ist.

6. 2.
Geben Sie unter Verwendung des Wertes

$$e = 2.7183$$

eine untere und eine obere Schranke für $e^{1.01}$.

6. 3.
Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f(x) = x^3 - x$$

die Voraussetzungen des Satzes von Rolle im Intervall $[0,\ 1]$ erfüllt. Ermitteln Sie alle $c \in]0,\ 1[$ für die $f^{'}(c) = 0$ gilt.

6. 4.
Sei

$$f(x) = x^3 - 3x + 1, \quad x \in [0,\ 2].$$

Ermitteln Sie alle $c \in [0,\ 2]$, die die Behauptung des Mittelwertsatzes illustrieren.

6. 5.
Zeigen Sie, dass die Funktionen

$$f(x) = -\arcsin\frac{1}{x} \quad (x \geq 1)$$

und

$$g(x) = \arctan\sqrt{x^2 - 1} \quad (x \geq 1)$$

sich nur um eine additive Konstante unterscheiden, und ermitteln Sie diese Konstante.

6. 6.
Berechnen Sie mit dem Horner-schen Schema den Wert der Funktion

$$g(x) = 2x^5 - 2x^4 + x^2 - 7x - 4$$

an der Stelle $x_0 = 3$.

6. 7.
Ermitteln Sie die Vielfachheit k der Nullstelle $x_0 = -3$ der Funktion

$$g(x) = x^4 - 19x^2 - 6x + 72$$

und spalten Sie von $g(x)$ den Faktor $(x+3)^k$ ab.

6. 8.
Ermitteln Sie die Taylor-sche Formel der Funktion

$$g(x) = 3x^4 + x^2 - 5x + 2$$

für die Entwicklungsstelle $x_0 = 2$ mit dem Restglied $R_1(x)$ in der Lagrange-schen Form.

6. 9.
Ermitteln Sie die TAYLOR-sche Formel der Funktion

$$f(x) = \sin^2 x$$

in der MacLaurinschen Form mit dem Lagrange-schen Restglied $R_5(x)$ und schätzen Sie $|R_5(x)|$ ab.

(Letzte Aktualisierung: 14.02.05)