Kapitel V
Ableitungen

D. 5. 1 (***Differenzierbarkeit an einer Stelle***)
Die in einer Umgebung von x_0 definierte Funktion f heißt *an der Stelle* x_0 *differenzierbar*, wenn der Grenzwert

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

existiert.
Dieser Grenzwert heißt *1. Ableitung* oder *Ableitung 1. Ordnung der Funktion* f *an der Stelle* x_0 und wird mit $f'(x_0)$ bezeichnet, also

(5. 1.) $$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

Mit Δx statt h kann man für (5. 1.) auch

(5. 2.) $$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

schreiben.
Eine weitere Schreibweise erhält man mit $x=x_0+h$, also $x\to x_0$ statt $h\to 0$:

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Für die 1. Ableitung $f'(x_0)$ sind auch die Symbole

$$y'\Big|_{x=x_0}, \qquad \frac{dy}{dx}\Big|_{x=x_0}, \qquad \frac{df(x)}{dx}\Big|_{x=x_0}$$

und die Bezeichnung *Differentialquotient 1. Ordnung von* f *an der Stelle* x_0 üblich.
Die Berechnung der Ableitung einer Funktion nennt man *Differentiation*.

BS. 5. 1.
Sei $f(x)=x^2$. Dann gilt:

$$f'(2)=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(2+h)^2-2^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^2+4h}{h}=\lim_{h\to 0}(h+4)=4$$

D. 5. 2. (***Einseitige Differenzierbarkeit***)
Eine (mindestens) in einem Intervall $[x_0,\ x_0 + c],\ c > 0$, definierte Funktion f heißt *an der Stelle* x_0 *rechtsseitig differenzierbar*, wenn der rechtsseitige Grenzwert

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

existiert. Dieser Grenzwert heißt *rechtseitige Ableitung von* f *an der Stelle* x_0 und wird mit $f_r^{'}$ bezeichnet.
Analog ist die *linksseitige Ableitung von* f *an der Stelle* x_0 definiert:

$$f_l^{'}(x_0) := \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

S. 5. 1.
Die Funktion $f(x)$ ist genau dann an der Stelle x_0 differenzierbar, wenn sie dort sowohl rechtsseitig als auch linksseitig differenzierbar ist und

$$f_r^{'}(x_0) = f_l^{'}(x_0)$$

gilt. In diesem Falle ist

$$f^{'}(x_0) = f_r^{'}(x_0) = f_l^{'}(x_0).$$

BS. 5. 2.
Die Funktion

$$f(x) = \left|x^3 - 1\right|,\ x \in \mathbb{R}^1$$

soll auf (einseitige) Differenzierbarkeit an der Stelle $x_0 = 1$ untersucht werden:
Wegen

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 1 & \text{für} \quad x \geq 1 \\ -(x^3 - 1) & \text{für} \quad x < 1 \end{cases},$$

also

$$f(1+h) = \begin{cases} (1+h)^3 - 1 = 3h + 3h^2 + h^3, & h \geq 0 \\ -[(1+h)^3 - 1] = -(3h + 3h^2 + h^3) & h < 0 \end{cases},$$

gilt:

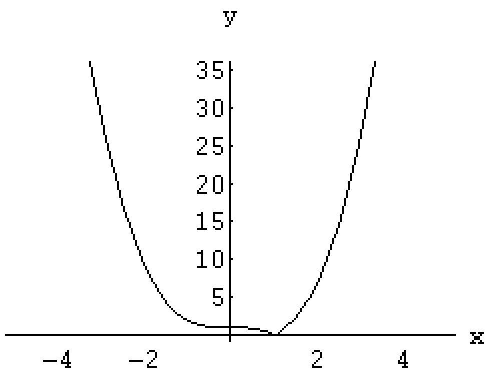
$$\frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \begin{cases} 3 + 3h + h^2 & \text{für} \quad h \geq 0 \\ -(3 + 3h + h^2) & \text{für} \quad h < 0 \end{cases}.$$

Daraus folg

$$f_r'(1) = \lim_{h\to 0^+}(3+3h+h^2) = 3$$

$$f_l'(1) = \lim_{h\to 0^-}(-3-3h-h^2) = -3\,.$$

Die Funktion f ist an der Stelle $x_0 = 1$ also rechtsseitig und linksseitig differenzierbar, aber nicht differenzierbar:



D. 5. 3.*(Differenzierbarkeit* in einem Intervall)
Eine auf einem Intervall I definierte Funktion f heißt *auf I differenzierbar*, wenn gilt:

1. f ist in jedem inneren Punkte von I differenzierbar.
2. Ist der linke (bzw. rechte) Randpunkt von I ein Element von I, dann ist f dort rechtsseitig (bzw. linksseitig) differenzierbar.

S. 5. 2.
Eine an der Stelle x_0 differenzierbare Funktion ist auch dort stetig.

S. 5. 3.
Die Funktionen f und g seien an der Stelle x_0 differenzierbar. Dann sind auch die Funktionen $f+g$, $c\cdot f$ (c ist eine Konstante) und $f\cdot g$ an der Stelle x_0 differenzierbar, und es gilt dort:

$$(f+g)' = f' + g'$$

$$(c\cdot f)' = c\cdot f'$$

$$(f\cdot g)' = f'\cdot g + f\cdot g' \quad (\textit{Produktregel}).$$

Ist ferner $g(x_0)\neq 0$, dann ist auch die Funktion $\dfrac{f}{g}$ an der Stelle x_0 differenzierbar, und es gilt dort:

$$(f/g)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2} \quad (\textit{Quotientenregel}).$$

S. 5. 4.(*Kettenregel*)
Ist die Funktion $g(x)$ an der Stelle $x = x_0$ und die Funktion $f(z)$ an der Stelle $z = g(x_0)$ differenzierbar, dann ist die mittelbare Funktion

$$F(x) = f(g(x))$$

an der Stelle $x = x_0$ differenzierbar, und es gilt die sog. *Kettenregel*:

$$F'(x) = f'(z_0) \cdot g'(x_0)$$

mit

$$z_0 = g(x_0).$$

B. 5. 1.
1.
Setzt man

$$y = f(z), \quad z = g(x),$$

dann ist

$$y = f(g(z)) = F(x),$$

und man kann die Kettenregel in der folgenden einprägsamen Form schreiben:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}.$$

2.
Die Kettenregel lässt sich auf den Fall ausdehnen, dass n Funktionen „ineinandergeschachtelt“ sind.

BS. 5. 3.

$$y = \sin(x^2)$$

$$z = x^2, \quad \frac{dz}{dx} = 2x$$

$$y = \sin z, \quad \frac{dy}{dz} = \cos z$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx} \cdot \frac{dy}{dz} = 3x \cdot \cos z = 2x \cdot \cos(x^2).$$

S. 5. 5.(***Ableitung der Umkehrfunktion***)
Die Funktion f sei eineindeutig und in einer Umgebung der Stelle x_0 differenzierbar mit $f'(x_0) \neq 0$.
Dann ist ihre Umkehrfunktion f^{-1} an der Stelle $y_0 = f(x_0)$ differenzierbar, und es gilt:

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} \quad \text{mit} \quad y_0 = f(x_0)$$

BS. 5. 4.
Die Funktion

$$y = f(x) = \sin(x), \quad |x| < \frac{\pi}{2}$$

ist eineindeutig und differenzierbar mit

$$\frac{dy}{dx} = (\sin x)' = \cos x \neq 0, \quad |x| < \frac{\pi}{2}.$$

Ihre Umkehrfunktion

$$x = f^{-1}(y) = \arcsin y, \quad |y| < 1,$$

ist daher ebenfalls differenzierbar, und es gilt

$$(\arcsin y)' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{\cos x}.$$

B. 5. 2.(***Logarithmische Differentiation***)
Es sei f eine Funktion, die auf einem Intervall differenzierbar und von Null verschieden ist.
Für die Ableitung der Funktion

$$u = \ln|f(x)|$$

erhält man nach der Kettenregel:

$$\begin{aligned}
&y = f(x) && \frac{dy}{dx} = f'(x) \\
&u = \ln|y| && \frac{du}{dy} = \frac{1}{y} = \frac{1}{f(x)} \\
&(\ln|f(x)|)' = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{du}{dy} = \frac{f'(x)}{f(x)} = u'
\end{aligned}$$

BS. 5. 5.

$$f(x)=\frac{(x-2)\cdot e^{2x}}{(x-1)^3\cdot(x+3)^2}, \quad x\neq 1,-3$$

$$\ln|f(x)|=\ln\left|\frac{(x-2)\cdot e^{2x}}{(x-1)^3\cdot(x+3)^2}\right|$$

$$=\ln\left|(x-2)\cdot e^{2x}\right|-\ln\left|(x-1)^3\cdot(x+3)^2\right|$$

$$=\ln|x-2|+\ln\left|e^{2x}\right|-\ln\left|(x-3)^3\right|-\ln\left|(x+3)^2\right|$$

$$=\ln|x-2|+2x-3\ln|x-1|-2\ln|x+3|$$

$$\left(\ln|f(x)|\right)'=\frac{1}{x-2}+2-\frac{3}{x-1}-\frac{2}{x+3}$$

$$f'(x)=\frac{(x-2)\cdot e^{2x}}{(x-1)^3\cdot(x+3)^2}.\left(\frac{1}{x-2}+2-\frac{3}{x-1}-\frac{2}{x+3}\right)$$

D. 5. 4.(*Ableitungen höherer Ordnung*)
Man nennt

$$\left.\frac{df'(x)}{dx}\right|_{x=x_0}$$

Ableitung 2. Ordnung (oder *2. Ableitung*) *der Funktion* f *an der Stelle* x_0 und schreibt dafür

$$f''(x_0) \quad \text{oder} \quad \left.y''\right|_{x=x_0} \quad \text{oder} \quad \left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=x_0} .$$

Allgemein definiert man für eine beliebige natürliche Zahl $n>1$ *die Ableitung* $n-$*ter Ordnung* (oder $n-$*ter Ableitung*) *von* f *an der Stelle* x_0 rekursiv durch die Vorschrift:

$$f^{(n)}(x)=\left(f^{(n-1)}(x)\right)'.$$

(Es ist zweckmäßig, $f(x)$ selbst als *Ableitung nullter Ordnung* zu bezeichnen, also

$$f^{(0)}(x):=f(x).$$

Eine Funktion f heißt *auf einem Intervall* I $n-$*mal (stetig) differenzierbar*, wenn die Ableitung $f^{(n)}$ auf I existiert (und stetig ist).

(Natürlich existieren dann erst recht die Ableitungen $f', f'', \ldots, f^{(n-1)}$ auf I.)

BS. 5. 6
Sei $f(x) = \ln x, \quad x > 0$. Dann gilt:

$$f'(x) = \frac{1}{x}, \; f''(x) = -\frac{1}{x^2}, \; f'''(x) = \frac{1 \cdot 2}{x^3}, \; f^{(4)}(x) = -\frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{x^4}, \; f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{x^n} \quad (n \geq 1, \text{ ganz; } x > 0)$$

(Die letzte Formel lässt sich durch vollständige Induktion beweisen.)

S. 5. 6.
Es gilt (unter entsprechenden Differenzierbarkeitsvoraussetzungen):

$$(f+g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)}$$
$$(c.f)^{(n)} = c \cdot f^{(n)}, \quad (c: \text{ eine Konstante})$$
$$(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot f^{(n-k)} \cdot g^{(k)}, \qquad \text{(Liebniz-sche Regel)}$$

BS. 5. 8.
Gesucht ist die 3. Ableitung der Funktion $y = x^2 \cdot \sin x$.

Lösung:

$$f(x) = x^2, \qquad g(x) = \sin x.$$

$$\begin{aligned}(f \cdot g)^{(3)} &= \sum_{k=0}^{3} \binom{3}{k} \cdot f^{(3-k)} \cdot g^{(k)} \\ &= \binom{3}{0} \cdot (x)''' \cdot \sin x + \binom{3}{1} \cdot (x)'' \cdot (\sin x)' + \binom{3}{2} (x^2)' \cdot (\sin x)'' + \binom{3}{3} \cdot x^2 \cdot (\sin x)''' \\ &= 6 \cos x - 6x \cdot \sin x - x^2 \cdot \cos x.\end{aligned}$$

S. 5. 7.
Ist f eine an der Stelle x differenzierbare Funktion, dann gibt es eine Funktion $\varphi(h)$, so dass gilt:

(5. 3.) $$f(x+h) - f(x) = f'(x) \cdot h + \varphi(h) \cdot h,$$

(5. 4.) $$\lim_{h \to 0} \varphi(h) = 0$$

mit

(5. 5.) $$\varphi(h) := \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f'(x), \quad h \neq 0$$

Beweis:
Ist f an der Stelle x differenzierbar, dann gilt

$$\lim_{h\to 0} = \left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h} - f'(x) \right) = 0\,.$$

Mit (5. 5.) gilt dann (5. 3.) und daraus (5. 4.).

B. 5. 3.
Die Formel (5. 3.) zusammen mit (5. 4.) heißt *Weierstraß-sche Zerlegungsformel.* Durch (5. 3.) ist die Funktionswertdifferenz

$$\Delta y = f(x+h) - f(x)$$

in zwei Summanden zerlegt., wobei der zweite Summand wegen (5. 4.) für $h \to 0$ "schneller" gegen Null konvergiert als der erste (sofern man von dem Fall $f'(x) = 0$ einmal absieht). Für kleine Werte von $|h|$ ist daher der (in h lineare) erste Summand $f'(x)\cdot h$ der „Hauptteil" in der Zerlegung von Δy.

D. 5. 5.(*Differential*)
Die Funktion f sei an der Stelle x differenzierbar. Das Produkt $f'(x)\cdot h$ heißt das zu der Stelle x und dem Argumentzuwachs h gehörige *Differential* (*1. Ordnung*) *von* f und wird mit $df(x)$ oder dy bezeichnet, also

(5. 6.) $$df(x) := f'(x)\cdot h$$

oder

(5. 6'.) $$dy := f'(x)\cdot h\,.$$

BS. 5. 8.
Sei

$$f(x) = \sin x\,.$$

Dann gilt

$$d(\sin x) = (\sin x)'\cdot h = \cos x \cdot h\,.$$

B. 5. 4.
Die Funktion $g(x) = x$ hat das Differential

(5. 7.) $$dx = (x)'\cdot h = h\,.$$

Wegen (5. 7.) identifiziert man den Argumentzuwachs h einer beliebigen Funktion f mit dem Differential dx der speziellen Funktion g. Man schreibt also statt (5. 6.) bzw. (5. 6'.) auch

(5. 8.) $$df(x) = f'(x) \cdot dx$$

oder

(5. 8'.) $$dx = f'(x) \cdot dx\,.$$

Dabei ist nun dx eine (von x unabhängige) Variable, die beliebige Werte annehmen kann und auch *Differential der unabhängigen Variablen* genannt wird.
Unter der Voraussetzung $dx \neq 0$ kann man z. B. (5. 8'.) durch dx dividieren und erhält

(5. 9'.) $$\frac{dy}{dx} = f'(x)\,.$$

Damit gewinnt die in D. 5. 1. zunächst nur als symbolische Schreibweise für die Ableitung $f'(x)$ eingeführte Bezeichnung $\frac{dy}{dx}$ eine neue Bedeutung. Gemäß (5. 9.) ist $f'(x)$ der *Quotient der Differentiale* dy und dx. Deshalb sagt man statt Ableitung auch *Differentialquotient*.

B. 5. 5.
Mit dx statt h und (5. 8.) lautet die Weierstraß-sche Zerlegungsformel:

$$f(x+dx) - f(x) = df(x) + \varphi(dx) \cdot dx$$

oder kurz

(5. 10.) $$\Delta y = dy + \varphi(dx) \cdot dx$$

mit

(5. 11.) $$\lim_{dx \to 0} \varphi(dx) = 0\,.$$

B. 5. 6.
Für (5. 10.) – (5. 11.) kann man auch schreiben:

$$\lim_{dx \to 0} \frac{\Delta y - dx}{dx} = 0\,.$$

In diesem Sinne gilt

$$\Delta y \approx dy$$

oder ausführlich

(5. 12.) $$f(x+h) - f(x) \approx f'(x).dx, \quad \text{falls } |dx| \text{ klein.}$$

BS. 5. 9.
Sei

$$f(x) = x^2, \quad x_0 = 1, \quad dx = 0.1.$$

Dann hat man

$$f(x_0 + dx) - f(x_0) = (1 + 0.1)^2 - 1 = 1.21 - 1 = 0.21.$$

$$f'(x_0) \cdot dx = 2 \cdot 1 \cdot 0.1 = 0.20\ .$$

$$0.21 \approx 0.20.$$

D. 5. 6(*Differential n-ter Ordnung*)
Als das *Differential n-ter Ordnung* $(n \geq 2)$ eine $n-$mal differenzierbaren Funktion versteht man

$$d^n y := f^{(n)}(x) \cdot dx^n$$

oder

$$d^n f(x) := f^{(n)}(x) \cdot dx^n\ .$$

BS. 5. 10.
Das Differential 2. Ordnung der Funktion

$$f(x) = x^3$$

lautet:

$$d^2(x^3) = (x)^{"} \cdot dx^2 = 6x \cdot dx^2$$

(Letzte Aktualisierung: 12.11.05)