Kapitel V
Ableitungen
(Lösungen)

5. 1.

$$f(x) = \sin x, \qquad f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$f^{'}(x) = \cos x, \qquad f^{'}\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{2},$$

$$y = f(x_0) + f^{'}(x_0) \cdot (x - x_0),$$

$$y = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left(x - \frac{3\pi}{4}\right).$$

5. 2.
Sei

$$y = f(x) = \sqrt{x}, \qquad x \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}.$$

Dann gilt für den Anstieg der Tangente im Punkt $(4,\ 2)$:

$$m_T = \lim_{x\to 4} \frac{f(x) - f(4)}{x-4}$$

$$= \lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4} = \lim_{x\to 4} \frac{(\sqrt{x}-2)\cdot(\sqrt{x}+2)}{(x-4)\cdot(\sqrt{x}+2)}$$

$$= \lim_{x\to 4} \frac{x-4}{(x-4)\cdot(\sqrt{x}+2)} = \lim_{x\to 4} \frac{1}{\sqrt{x}+2}$$

$$= \frac{1}{4}.$$

Die Gleichung der Tangente lautet:

$$y - 2 = m_T \cdot (x-4)$$

$$= \frac{1}{4}(x-4).$$

5. 3.
1. Lösungsvariante:

$$f^{'}(2) = \lim_{x\to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x-2}$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{\frac{3+x}{3-x} - \frac{3+2}{3-2}}{x-2}$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{6 \cdot (x-2)}{(3-x) \cdot (x-2)}$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{6}{3-x} = 6 .$$

2. Lösungsvariante:

$$f^{'}(2) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(2+\Delta x) - f(2)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{3+(2+\Delta x)}{3-(2+\Delta x)} - \frac{3+2}{3-2}}{x-2}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{6 \cdot \Delta x}{\Delta x \cdot (1-\Delta x)}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{6}{1-\Delta x} = 6$$

5. 4.

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(a+2t) - f(a+t)}{2t} = \lim_{t \to 0} \frac{\left(f(a+2t) - f(a)\right) - \left(f(a+t) - f(a)\right)}{2t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{f(a+2t) - f(a)}{2t} - \lim_{t \to 0} \frac{f(a+t) - f(a)}{2t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{f(a+2t) - f(a)}{2t} - \frac{1}{2} \cdot \lim_{t \to 0} \frac{f(a+t) - f(a)}{t}$$

$$= \lim_{2t \to 0} \frac{f(a+2t) - f(a)}{2t} - \frac{1}{2} f^{'}(a)$$

$$= f^{'}(a) - \frac{1}{2} f^{'}(a) = \frac{1}{2} f^{'}(a)$$

$$= \frac{b}{2} .$$

5. 5.

$$|x| = \begin{cases} x & für \quad x > 0 \\ -x & für \quad x < 0 \end{cases}$$

$$f_l^{'}(x_0) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0^-} \left(\frac{-h}{h} \right) = -1 = f_l^{'}(0).$$

$$f_r^{'}(x_0) = \lim_{h \to 0+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0^+} \left(\frac{h}{h} \right) = 1 = f_r^{'}(0).$$

5. 6.

a)

$$f'(x) = 6x - 5 - 3\cos x.$$

b)

$$f'(x) = \left(4x^3 + 4\right) \cdot \sin x + \left(x^4 + 4x\right) \cdot \cos x.$$

c)

$$f'(x) = \frac{(2x - \cos x) \cdot (2 + \sin x) - \cos x \cdot \left(x^2 - \sin x\right)}{(2 + \sin x)^2}$$

$$= \frac{4x + 2x \cdot \sin x - 2\cos x - x^2 \cdot \cos x}{(2 + \sin x)^2}.$$

5. 7.

a)

$$u = 2x^3 - 3x + 4\sin x, \qquad \frac{du}{dx} = 6x^2 - 3 + 4\cos x;$$

$$y = u^7, \qquad \frac{dy}{du} = 7u^6;$$

$$\frac{dy}{dx} = 7 \cdot .\left(6x^2 - 3 + 4\cos x\right) \cdot \left(2x^3 - 3x + 4\sin x\right)^6.$$

b)

$$u = x^3 + 3x2 - 8, \qquad \frac{du}{dx} = 3x^2 + 6x;$$

$$t = u^4, \qquad \frac{dt}{du} = u^4;$$

$$y = \sin t, \qquad \frac{dy}{dt} = \cos t;$$

$$\frac{dy}{dx} = 7 \cdot .(3x^2 + 6x) \cdot (x^3 + 3x^2 - 8)^3 \cdot (x^3 + 3x^2 - 8)^4 .$$

5. 8.

a)

f ist für alle $x > 0$ definiert und differenzierbar, und mit

$$f(x) = x^{-\frac{3}{2}} + 2x^{-5} - 3x^x \cdot x^3$$

folgt

$$f'(x) = -\frac{3}{2}x^{-\frac{5}{2}} - 10x^{-6} - 3x^x \cdot \ln 3 \cdot x^3 - 3^x \cdot 3x^2$$

$$= -\frac{3}{2\sqrt{x^5}} - \frac{10}{x} - x^2 \cdot 3^x \cdot (x \cdot \ln 3 + 3).$$

b)

f ist für alle $x > 0$, $x \neq 1$ definiert und differenzierbar mit

$$f'(x) = \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x}.$$

c)

f ist für alle $x \neq 1$ definiert und differenzierbar mit

$$f'(x) = \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{x}\right)^2} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{1}{1 + x^2}.$$

d)

f ist für alle x definiert und differenzierbar mit

$$f'(x) = -\frac{1}{3}(x^2 + 1)^{-\frac{4}{3}} \cdot 2x = -\frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2 + 1)^4}}$$

e)

f ist für alle $x \leq \frac{1}{2}$ definiert und für alle $x < \frac{1}{2}$ differenzierbar mit

$$f'(x) = -2x \cdot e^{-x^2} + \sin\sqrt{1 - 2x} \cdot \frac{-2}{2\sqrt{1 - 2x}}$$

$$= -2x \cdot e^{-x^2} - \frac{\sin\sqrt{1-2x}}{\sqrt{1-2x}}$$

f)
f ist für alle x definiert und differenzierbar mit

$$f'(x) = 2\cosh h\frac{1-x^2}{1+x^2} \cdot \sinh\frac{1-x^2}{1+x^2} \cdot \frac{-2x \cdot (1+x^2) - (1-x^2) \cdot 2x}{(1+x^2)^2}$$

$$= -\frac{4x}{(1+x^2)^2} \cdot \sinh\frac{2 \cdot (1-x^2)}{1+x^2}$$

5. 9.
Gesucht sind alle Kurvenpunkte $P(x, y)$ mit $y' = 0$. Wegen

$$y' = 3 \cdot (x-1)^2 \cdot (x+1) + (x-1)^3 = (x-1)^2 \cdot (4x+2)$$

ist

$$x = -\frac{1}{2} \qquad \text{oder} \qquad x = 1,$$

also

$$P_1\left(-\frac{1}{2}, -\frac{27}{16}\right), \qquad P_2(1,\ 0).$$

5. 10.
a)

$$f'(x) = x^x \cdot (\ln x + 1).$$

b)

$$\ln y = x \cdot \ln\tan x \qquad \left((\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x \right)$$

$$y' = \left(\ln\tan x + \frac{x}{\sin x \cdot \cos x} \right) \cdot (\tan x)^x$$

c)

$$f'(x) = \frac{\sqrt{(x+1) \cdot (x-3)}}{(x^3+2) \cdot \sqrt[3]{x-2}} \cdot \left(\frac{1}{2 \cdot (x+1)} + \frac{1}{2 \cdot (x-3)} - \frac{3x^2}{x^3+2} - \frac{1}{3 \cdot (x-2)} \right)$$

5. 11.

$x \neq 0:$ $\quad f'(x) = 2x \cdot \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$

$x = 0:$ $\quad \lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} h \cdot \sin\frac{1}{h} = 0\,, \quad (h \neq 0)\,, \ f'(0) = 0\,.$

5. 12.

$u = \sin^2 x = \sin x \cdot \sin x\,; \qquad \frac{du}{dx} = 2\sin x \cdot \cos x\,,$

$y = e^u\,; \qquad \frac{dy}{du} = e^u\,,$

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = 2\sin x \cdot \cos x \cdot e^{\sin^2 x} = e^{\sin^2 x} \cdot \sin 2x\,,$$

$$f''(x) = e^{\sin^2 x} \cdot \sin 2x \cdot \sin 2x + 2\cos 2x \cdot e^{\sin^2 x}$$

$$= e^{\sin^2 x} \cdot \left((\sin 2x)^2 + 2\cos 2x\right)$$

5. 13.

$$\frac{d^{(k)}(x^n)}{dx^k} = \begin{cases} n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)^{n-k} & \textit{für} \quad k < n \\ n! & \textit{für} \quad k = n \\ 0 & \textit{für} \quad k > n \end{cases}$$

5. 14.
a)

$$\frac{d^n \cos x}{dx^n} = \begin{cases} (-1)^k \cdot \cos x & \textit{für} \quad n = 2k \\ (-1)^{k+1} \cdot \sin x & \textit{für} \quad n = 2k+1 \end{cases} \qquad k \geq 0: \text{ganz}$$

b)

$$\left.\frac{d^n \cos x}{dx^n}\right|_{x=0} = \begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}} & \textit{für} \quad n: \textit{gerade} \\ 0 & \textit{für} \quad n: \textit{ungerade} \end{cases}$$

5. 15.

$$\frac{d^n\left(a^x\right)}{dx^n} = a^x \cdot (\ln a)^n\,, \qquad \frac{d^n\left(e^x\right)}{dx^n} = e^x$$

5. 16.

$$\left(f\cdot g\right)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot f^{(n-k)}\cdot g^{(k)}$$

a)

$$f^{(4)}=3\cdot 4!+0+\frac{1}{2^4}\cdot\cos\frac{x}{2}=72+\frac{1}{16}\cdot\cos\frac{x}{2}$$

b)

$$f^{(4)}=\left(x^3\cdot e^{-x}\right)^{(4)}=\left(x^3-12x^2+36x-24\right)\cdot e^{-x}$$

5. 17.

a)

$$df(x)=-\sin x dx$$

b)

$$df(x)=(1-x)\cdot e^{-x}\cdot dx$$

c)

$$df(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+3}}\cdot dx$$

5. 18.

$$y=\sin x, \qquad \Delta y=\cos x dx,$$

$$x=45^\circ=\frac{\pi}{4}, \qquad \Delta x=1^\circ=\frac{\pi}{180},$$

$$\sin 46^\circ=\sin\frac{\pi}{4}+\Delta y\approx\sin\frac{\pi}{4}+dy=\sin\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{4}\cdot\frac{\pi}{180},$$

$$\sin 46^\circ\approx\frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot\left(1+\frac{\pi}{180}\right)\approx 0.7194$$

5. 19.

a)

$$\frac{df(x)}{dx}=\ln|x|+1, \qquad \frac{d^2 f}{dx^2}=\frac{1}{x}, \qquad \frac{d^3 f(x)}{dx^3}=-\frac{1}{x^2};$$

$$d^3 f(x)=-\frac{1}{x^2}.dx^3.$$

b)

$$\frac{df(x)}{dx} = 6x - 5, \qquad \frac{d^2 f}{dx^2} = 6, \qquad \frac{d^3 f(x)}{dx^3} = 0;$$

$$d^3 f(x) = 0.$$

5. 20.
1.

$$x(6) - x(5) = \frac{100}{6} - \frac{100}{5} \approx -3.33$$

2.

$$\frac{dx}{dp} = f^{'}(p), \qquad dx = dp \cdot f^{'}(p),$$

$$f^{'}(p) = -\frac{100}{p^2}, \qquad f^{'}(p_0) = -\frac{100}{25} = -4,$$

$$dp = 6 - 5 = 1, \qquad dx = -4 \cdot 1 = -4.$$

(Letzte Aktualisierung: 19.02.05)