

Kapitel V

Ableitungen

(Aufgaben)

5. 1.

Ermitteln Sie die Gleichung der Tangente an die Kurve $y = \sin x$ in dem Kurvenpunkt mit der Abszisse $x_0 = \frac{3}{4}\pi$.

5. 2.

Ermitteln Sie die Gleichung der Tangente an die Kurve $y = f(x) = \sqrt{x}$ in dem Kurvenpunkt $(4, 2)$.

5. 3.

Sei

$$f(x) = \frac{3+x}{3-x}, \quad x \neq 3.$$

Berechnen Sie $f'(2)$.

5. 4.

Sei $f'(a) = b$. Berechne

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a+2t) - f(a+t)}{2t}$$

5. 5.

Untersuchen Sie die Funktion

$$f(x) = |x|, \quad x \in \mathbb{R}^1,$$

auf einseitige Differenzierbarkeit an der Stelle $x = 0$.

5. 6.

Ermitteln Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen:

a) $f(x) = 2x^3 - 5x - 3\sin x + \sin \frac{\pi}{8}$,

b) $f(x) = (x^4 + 4x)\sin x$,

c) $f(x) = \frac{x^2 - \sin x}{2 + \sin x}$.

5. 7.

Differenzieren Sie die folgenden Funktionen:

a) $y = (2x^3 - 3x + 4\sin x)^7$,

$$\text{b) } y = \sin(x^3 + 3x^2 - 8)^4.$$

5. 8.

Differenzieren Sie die folgenden Funktionen. Der Definitionsbereich jeder dieser Funktionen sei stets die Menge aller x , für die der rechts vom Gleichheitszeichen stehende Ausdruck einen Sinn hat. Welche Werte x sind das? Für welche dieser Werte x sind die Funktionen jeweils differenzierbar?

$$\text{a) } f(x) = \frac{1}{x\sqrt{x}} + \frac{2}{x^5} - 3^x x^3,$$

$$\text{b) } f(x) = \ln|\ln x|,$$

$$\text{c) } f(x) = \arctan \frac{1}{x},$$

$$\text{d) } f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2 + 1}},$$

$$\text{e) } f(x) = e^{-x^2} - \cos\sqrt{1-2x}.$$

5. 9.

Ermitteln Sie alle Punkte der Parabel

$$y = (x-1)^3(x+1),$$

zu denen eine zur x -Achse Parallele Tangente gehört.

5. 10.

Bilden Sie durch logarithmische Differentiation die Ableitung der folgenden Funktionen:

$$\text{a) } f(x) = x^x, \quad x > 0,$$

$$\text{b) } f(x) = (\tan x)^x, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2},$$

$$\text{c) } f(x) = \frac{\sqrt{(x+1)(x-3)}}{(x^3+2)\sqrt[3]{x-2}}, \quad x > 3.$$

5. 11.

Zeigen Sie, daß die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

für jedes x differenzierbar ist, und ermitteln Sie die Ableitung.

5. 12.

Berechnen Sie die 2. Ableitung der Funktion $f(x) = e^{\sin^2 x}$.

5. 13.

Berechnen Sie sämtliche Ableitungen der Funktion $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$.

5. 14.

Ermitteln Sie eine Formel für die n -te Ableitung der Funktion $f(x) = \cos x$

- a) an einer beliebigen Stelle x ,
 b) spezielle an der Stelle $x = 0$.

5. 15.

Wie lautet die n -te Ableitung der Funktion $f(x) = a^x$, $a > 0$. Was ergibt sich speziell für $a = e$?

5. 16.

Berechnen Sie die 4. Ableitung der folgenden Funktionen

$$\text{a) } f(x) = 3x^4 - 5x^2 + \cos \frac{x}{2}, \quad \text{b) } f(x) = \frac{x^3}{e^x}.$$

5. 17.

Berechnen Sie die zu einer beliebigen Stelle x und einem beliebigen Zuwachs dx gehörigen Differentiale der folgenden Funktionen:

$$\text{a) } f(x) = \cos x, \quad \text{b) } f(x) = xe^{-x}, \quad \text{c) } f(x) = \sqrt{x^2 + 3}.$$

5. 18.

Geben Sie einen Näherungswert für $\sin 46^\circ$ an, indem Sie die Funktionswertdifferenz

$$\Delta y = \sin 46^\circ - \sin 45^\circ$$

durch das entsprechende Differential dy ersetzen.

5. 19.

Berechnen Sie die Differentiale 3. Ordnung der folgenden Funktionen:

$$\text{a) } f(x) = x \ln|x|, \quad x \neq 0, \quad \text{b) } f(x) = 3x^2 - 5x.$$

5. 20.

Gegeben sei die Nachfragefunktion

$$x = \frac{100}{p}$$

mit

x : Nachfrage

p : Preis.

Wie ändert sich die Nachfrage, wenn sich der Preis von 5 € auf 6 € erhöht?

Berechnen Sie diese Größe

1. exakt
2. näherungsweise mit Hilfe des Differentials.

(Letzte Aktualisierung: 19.02.05)