Kapitel IV
Stetigkeit

<u>D. 4. 1</u> (*Stetigkeit an einer Stelle*)
Eine in einer Umgebung von x_0 definierte Funktion f heiß *an der Stelle* x_0 *stetig*, wenn gilt

(4. 1.) $$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)\,.$$

<u>B. 4. 1.</u>
Führt man durch die Substitution

$$x = x_0 + h$$

die neue Variable h ein, so kann man für (4. 1.) offenbar auch schreiben

(4. 2.) $$\lim_{h\to 0} f(x_0+h) = f(x_0)\,.$$

<u>BS. 4. 1.</u>
Es gilt

$$\lim_{x\to 0}\cos x = 1 = \cos 0\,,$$

folglich ist $f(x)=\cos x$ an der Stelle x_0 stetig.

<u>BS. 4. 2.</u>
Für die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{4x^2-1}{2x-1} & \text{für} \quad x \neq \dfrac{1}{2} \\ 3 & \text{für} \quad x = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

gilt

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}} f(x) = 2 \neq 3 = f\left(\frac{1}{2}\right).$$

Daher ist f an der Stelle $x = \dfrac{1}{2}$ nicht stetig.

<u>B. 4. 2.</u>
Unter Beachtung der Definition des Grenzwertes einer Funktion erhält man die folgende ausführliche Formulierung von D. 4. 1.

D. 4. 2.
Eine in einer Umgebung von x_0 definierte Funktion f heißt *an der Stelle* x_0 *stetig*, wenn für jede Folge $\{x_n\}$ in $D(f)$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\lim_{n\to\infty} x_n).$$

B. 4. 3.
Eine „$\varepsilon - \delta -$“-Charakterisierung des Grenzwertes einer Funktion liefert eine entsprechende Charakterisierung der Stetigkeit.

S. 4. 1.
Die Funktion f sei in einer Umgebung von x_0 definiert.
f ist an der Stelle x_0 genau dann stetig, wenn zu jeder (insbesondere jeder beliebig kleinen) Zahl $\varepsilon > 0$ eine Zahl $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ existiert, so dass gilt

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

für alle x mit

$$|x - x_0)| < \delta .$$

D. 4. 3. ***(Einseitige Stetigkeit)***
Eine (mindestens) in einem Intervall $[x_0,\ x_0 + \delta],\ \delta > 0$, definierte Funktion f heißt *an der Stelle* x_0 *rechtsseitig stetig*, wenn gilt

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0).$$

Für Funktionen, die in einem Intervall $[x_0 - \delta,\ x_0],\ \delta > 0$, erklärt sind, ist entsprechend die *linksseitige Stetigkeit an der Stelle* x_0 durch die Forderung

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0)$$

definiert.

S. 4. 2.
Eine in einer Umgebung von x_0 definierte Funktion ist genau dann an der Stelle x_0 stetig, wenn sie dort sowohl linksseitig als auch rechtsseitig stetig ist.

Beweis:
Der Beweis folgt unmittelbar aus Satz S. 3. 2.

<u>BS. 4. 3.</u>
Für die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{x} & \text{für} \quad 0 < x \leq 3 \\ x - 1 & \text{für} \quad x > 3 \end{cases}$$

gilt

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = 1 = f(3),$$

folglich ist f an der Stelle $x = 3$ linksseitig stetig.
Wegen

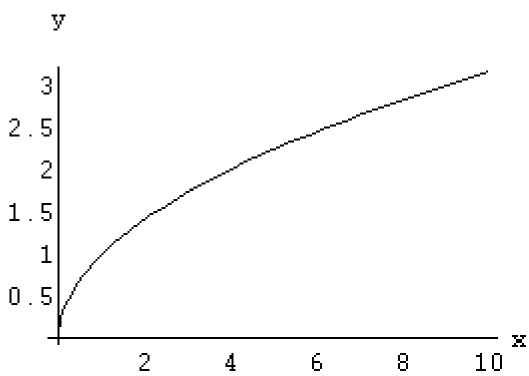
$$\lim_{x \to 3^+} f(x) = 2 \neq f(3)$$

ist f an der Stelle $x = 3$ nicht rechtsseitig stetig, also erst recht nicht stetig.

<u>D. 4. 3.</u> (*Stetigkeit in einem Intervall*)
Eine auf einem Intervall I definierte Funktion f heißt *auf I stetig*, wenn gilt:

1. f ist in jedem inneren Punkt von I stetig.
2. Ist der linke (bzw. rechte) Randpunkt von I ein Element von I, dann ist f dort rechtsseitig (bzw. linksseitig) stetig.

<u>BS. 4. 4.</u>
Die Funktion $f(x) = \sqrt{x},\ x \in [0,\ +\infty[$, in jedem $x_0 \in]0,\ +\infty[$ und in $x_0 = 0$ rechtsseitig stetig, also auf dem Intervall $[0,\ +\infty[$ stetig.



<u>B. 4. 4.</u> (*Unendlichkeitsstellen und ihre Klassifikation*)
Aus der Definition der Stetigkeit ergibt sich, dass für jede Unstetigkeitsstelle x_0 von f genau einer der folgenden <u>fünf Fälle</u> vorliegt:

Fall 1 (*Hebbare Unstetigkeit*)
Der Grenzwert

$$g = \lim_{x \to x_0} f(x)$$

existiert, ist aber von $f(x_0)$ verschieden, sofern f an der Stelle x_0 überhaupt definiert ist.

Die Funktion

$$f(x) = \frac{4x^2 - 1}{2x - 1}, \quad x \neq \frac{1}{2},$$

ist an der Stelle $x = \frac{1}{2}$ nicht definiert. Es gilt jedoch (s. Beispiel BS. 3. 2.)

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}} = \frac{4x^2 - 1}{2x - 1} = 2.$$

Durch die *Ersatzfunktion*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{4x^2 - 1}{2x - 1} & \text{für} \quad x \neq \dfrac{1}{2} \\ 2 & \text{für} \quad x = \dfrac{1}{2} \end{cases} .$$

wird die Unstetigkeitsstelle gehoben. Die Funktion $f(x)$ ist dann definiert und stetig in R^1.

Fall 2 (*Endliche Sprungstelle*)
Die Grenzwerte $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$ und $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$ existieren, sind aber voneinander verschieden.
In diesem Falle heißt x_0 *Sprungstelle von f mit endlichem Sprung*.

Sei

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{für} \quad x < 0 \\ x^2 & \text{für} \quad x \geq 0 \end{cases} .$$

Es gilt

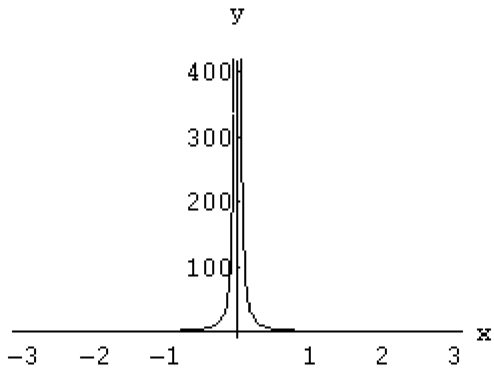
$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (1 - x) = 1,$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} x^2 = 0.$$

Fall 3 (*Unendlichkeitsstelle von* f)
Es gilt $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ oder $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$. In diesem Falle nennt man x_0 *Unendlichkeitsstelle von* f .

Sei $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $x \neq 0$. Dann gilt

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} \frac{1}{x^2} = +\infty .$$



Fall 4 (*Sprungstelle von* f *mit unendlichem Sprung*)
Die Funktion f ist für eine der beiden „Bewegungen“ $x \to x_0^-$, $x \to x_0^+$ bestimmt divergent gegen $+\infty$ (bzw. $-\infty$) und für die andere „Bewegung“ konvergent oder bestimmt divergent gegen $+\infty$ (bzw. $-\infty$). In diesem Falle heißt x_0 *Sprungstelle von* f *mit unendlichem Sprung*.

Es sei

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad x \leq 0 \\ \ln x & \text{für} \quad x > 0 \end{cases}.$$

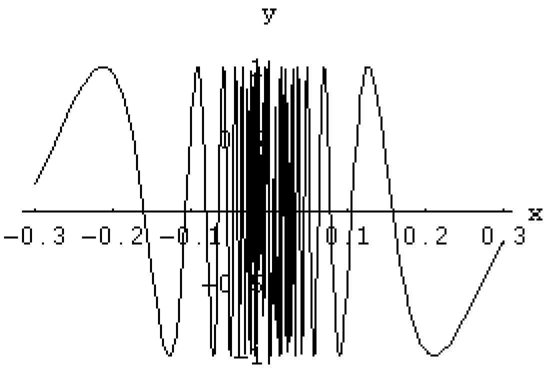
Dann gilt

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty ,$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} 1 = 1 .$$

Fall 5 (*Oszillatorische Unstetigkeit*)
Die Funktion f ist für mindestens eine der beiden „Bewegungen“ $x \to x_0^-$, $x \to x_0^+$ unbestimmt divergent. In diesem Falle heißt o*szillatorische Unstetigkeit von* f .

Dazu sei die Funktion $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ betrachtet:



S. 4. 3
Ist die Funktion f an der Stelle x_0 stetig und $f(x_0) > 0$ (bzw. $f(x_0) > 0$), dann gibt es eine Umgebung von x_0, so dass auch noch für alle x aus dieser Umgebung $f(x_0) > 0$ (bzw. $f(x_0) > 0$) gilt.

S. 4. 4
Die Funktionen f und g seien an der Stelle x_0 stetig.
Dann sind die Funktionen

$$f + g; \qquad c \cdot f \quad (c\text{: eine Konstante}); \qquad f \cdot g$$

an der Stelle x_0 stetig.
Ist ferner $g(x_0) \neq 0$, dann ist auch die Funktion

$$\frac{f}{g}$$

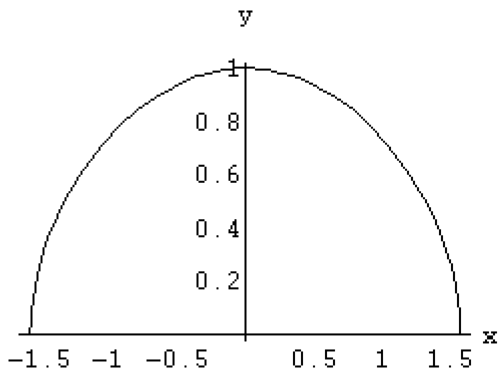
an der Stelle x_0 stetig.

S. 4. 5
Ist die Funktion $g(x)$ an der Stelle $x = x_0$ stetig und die Funktion $f(z)$ an der Stelle $z = g(x_0)$ stetig, dann ist die mittelbare Funktion $f(g(x))$ an der Stelle $x = x_0$ stetig.

BS. 4. 6
Die Funktion

$$f(x) = \sqrt{\cos x}, \quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \; \frac{\pi}{2}\right]$$

ist nach Satz S. 4. 5. in $x=0$ stetig, da $g(x)=\cos x$ an der Stelle $x=0$ stetig ist und $f_1(z)=\sqrt{z}$ an der Stelle $z=\cos 0=1$ stetig ist.



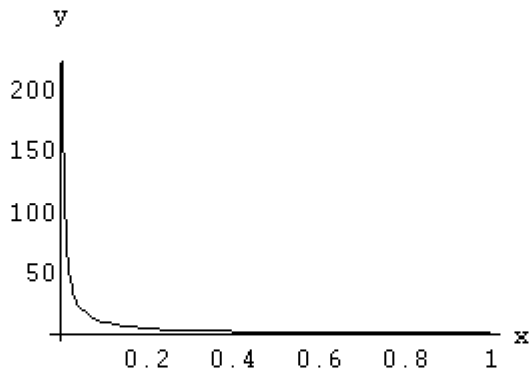
S. 4. 6.
Jede Elementarfunktion ist auf ihrem Definitionsbereichs stetig.
(Eine Elementarfunktion ist eine Funktion, die sich aus den Grundfunktionen durch Anwendung der rationalen Grundoperationen und Bildung mittelbarer Funktionen in endlich vielen Schritten erzeugen lässt.)

S .4. 7.
Jede auf $[a,\ b]$ stetige Funktion ist dort beschränkt.

BS. 4. 6.
Die Funktion

$$f(x)=\frac{1}{x},\quad x\in\,]0,\ 1]$$

ist auf dem (nicht abgeschlossenem Intervall) $x\in\,]0,\ 1]$ stetig, aber wegen $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=+\infty$ nicht beschränkt.



D. 4. 4. (*Absolute Extrema*)
Die Funktion f sei auf dem Intervall I definiert, und es sei $x_0\in I$. Der Funktionswert $f(x_0)$ heißt *absolutes Maximum* (bzw. *Minimum*) *von* f *auf* I, wenn gilt:

$$f(x)\le f(x_0),\quad \forall x\in I$$

$$(\text{bzw.} \qquad f(x) \leq f(x_0), \quad \forall x \in I).$$

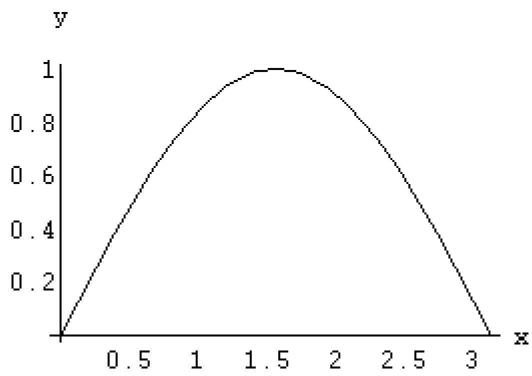
Absolute Maxima und Minima gemeinsam nennt man *absolute* Extrema.

S. 4. 8 (Weierstraß)
Jede auf $[a,\ b]$ stetige Funktion hat dort ein absolutes Maximum und ein absolutes Minimum.

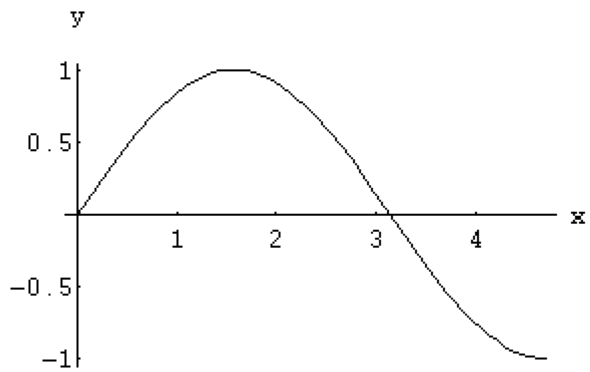
BS. 4. 7.
Die stetige Funktion

$$f(x) = \sin x$$

hat auf dem Intervall $[0,\ \pi]$ das absolute Maximum $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ und das absolute Minimum $f(0) = f(\pi) = 0$.



Auf dem Intervall $\left[0,\ \frac{3}{2}\pi\right[$ hat f kein absolutes Minimum, da die untere Schranke –1 des Wertevorrats von f nicht Funktionswert ist.



S. 4. 9. (Bolzano)
Ist die Funktion f auf $[a,\ b]$ stetig und haben die Funktionswerte $f(a)$ und $f(b)$ entgegenbesetze Vorzeichen, dann gibt es (mindesten) ein $\xi \in\ ]a,\ b[$ mit $f(\xi) = 0$.

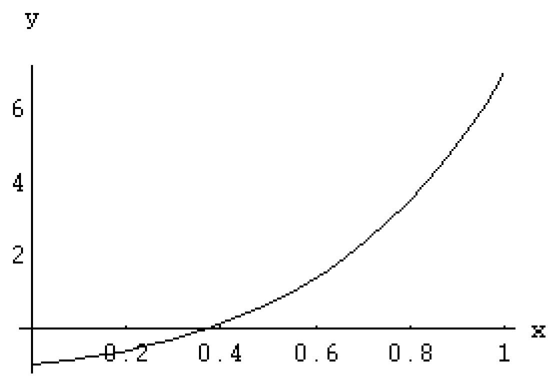
BS. 4. 8.
Gesucht ist ein (möglichst kleines) Intervall, welches eine positive Lösung ξ der Gleichung

$$10^x - x - 2 = 0$$

enthält.
Als elementare Funktion ist

$$f(x) = 10^x - x - 2$$

stetig. Wegen $f(0) = -1 < 0$ und $f(1) = 7 > 0$ liegt eine Lösung der Gleichung in $]0,\ 1[$.



S. 4. 10.
Die Funktion f sei auf dem Intervall I stetig. Dann ist ihr Wertevorrat $\{f(x) \mid x \in I\}$ ebenfalls ein Intervall.

S. 4. 11.
Die Funktion f sei auf einem Intervall eineindeutig und stetig. Dann ist ihre Umkehrfunktion f^{-1} auf dem Wertevorrat von f, der ebenfalls ein Intervall ist, stetig.

(Letzte Aktualisierung: 18.10.05)