Kapitel IV
Stetigkeit einer Funktion
(Lösungen)

4. 1.

a)

Für jede Folge $\{x_n\}, n \in N$, mit $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x_0$ gilt:

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \lim_{n\to+\infty} x_n \cdot \lim_{n\to+\infty} x_n = x_0^2 = f(x_0)$$

Damit ist $f(x)$ stetig am jeder Stelle x_0.

b)

Wegen $\lim\limits_{x\to 0} \sin x = 0 = \sin 0$ ist $f(x) = \sin x$ in $x = 0$ stetig.

c)

Es gilt

$$\lim_{n\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \cos x = 1 \neq 0 = 2\cdot 0 = f(0) \quad \Rightarrow f(x) \text{ nicht linksseitig stetig;}$$

$$\lim_{n\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} 2x = 0 = 2\cdot 0 = f(0) \quad \Rightarrow f(x) \text{ rechtsseitig stetig.}$$

d)

Es gilt folgende Aussage;

Ist $\varepsilon > 0$ beliebig gegeben, dann gilt:

$$|f(x) - f(0)| = \left| x \cdot \sin\frac{1}{x} \right| \leq |x| < \varepsilon \text{ für alle } x \text{ mit } |x - 0| = |x| < \delta \text{, falls } \delta = \varepsilon \text{ gesetzt}$$

wird.

Damit ist f an der Stelle $x = 0$ stetig. Es gilt also

$$\lim_{x\to 0}\left(x \cdot \sin\frac{1}{x} \right) = 0.$$

4. 2.

a)

Wegen

$$\lim_{x\to 0^-} \operatorname{sgn} x = -1; \qquad \lim_{x\to 0+} \operatorname{sgn} x = 1$$

hat $f(x) = \operatorname{sgn} x$ bei $x = 0$ einen endlichen Sprung.

b)
Da

$$\lim_{x\to -1} f(x) = \lim_{x\to -1}(x-1) = -2$$

existiert, ist $x = -1$ eine hebbare Unstetigkeitsstelle von f.

$$f^*(x) = \left\{\begin{matrix} \dfrac{x^2-1}{x+1} & \textit{für} & x \neq -1 \\ -2 & \textit{für} & x = -1 \end{matrix}\right\} = x-1, \quad x \in R^1$$

c)
Wegen

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1 \neq f(0)$$

ist $x = -1$ eine hebbare Unstetigkeitsstelle von

$$f^*(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \textit{für} \quad x \neq 0 \\ -1 & \textit{für} \quad x = 0 \end{cases}$$

d)
Es gilt:

Satz: Es sei $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$ *, und für alle* x *einer Umgebung von* x_0 *gelte* $f(x) > 0$ *bzw.* $f(x) < 0$.
Dann ist

$$\lim_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)} = +\infty \quad \textit{bzw.} \quad \lim_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)} = -\infty .$$

Daher ist wegen $\lim_{x\to 3} f(x) = -\infty$ die Stelle $x = 3$ eine Unendlichkeitsstelle von f.

e)
Wegen

$$\lim_{x\to 0^-}\cot x = \lim_{x\to 0^-}\frac{\cos x}{\sin x} = -\infty, \qquad \lim_{x\to 0^+}\cot x = \lim_{x\to 0^+}\frac{\cos x}{\sin x} = +\infty$$

hat $f(x) = \cot x$ bei $x = 0$ einen unendlichen Sprung.

4. 3.
a)

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} e = 1 = e^0 = f(0);$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \cos x = 1 = \cos 0 .$$

Damit ist $f(x)$ in $x = 0$ stetig.

b)

$$|x-3| = \begin{cases} x+3 & \textit{für} \quad x > 3 \\ -x+3 & \textit{für} \quad x < 3 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \sqrt{3} \neq -2+3 = 1 = f(2);$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = -2+3 = 1 = f(2).$$

$f(x)$ ist in $x = 2$ rechtsseitig stetig, aber nicht linksseitig.

4. 4.
Nach dem Satz von BOLZANO gilt die Behauptung wegen

$$2.\lg 2 - 1 = 2 \cdot 0.3 - 1 < 0$$

und

$$3.\lg 2 - 1 = 3 \cdot 0.47 - 1 > 0$$

4. 5.
1.

$\{-1, 0, 1\}$ (Kein Intervall!)

2.

Der Satz ist hier *nicht* anwendbar, da f auf R^1 nicht stetig ist.

(Letzte Aktualisierung: 20.02.05)