

# Kapitel IV

## Stetigkeit einer Funktion (Aufgaben)

### 4. 1.

Untersuchen Sie die folgenden Funktionen  $f$  auf Stetigkeit bzw. einseitige Stetigkeit an den angegebenen Stellen  $x_0$ .

a)  $f(x) = x^3$ ,  $x_0$  beliebig.

b)  $f(x) = \sin x$ ,  $x_0 = 0$ .

c)  $f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{für } x < 0, \\ 2x & \text{für } x \geq 0, \end{cases} \quad x_0 = 0.$

d)  $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases} \quad x_0 = 0.$

### 4. 2.

Klassifizieren Sie die Unstetigkeitsstellen  $x_0$  der folgenden Funktionen  $f$ , und geben Sie im Falle einer hebbaren Unstetigkeitsstelle eine an der Stelle  $x_0$  stetige Ersatzfunktion"  $f^*$  für  $f$  an.

a)  $f(x) = \operatorname{sgn} x$ ,  $x_0 = 0$ .

b)  $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 1}$ ,  $(x \neq -1)$ ,  $x_0 = -1$ .

c)  $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{für } x \neq 0, \\ -1 & \text{für } x = 0, \end{cases} \quad x_0 = 0.$

d)  $f(x) = -\frac{5}{(x-3)^4}$  ( $x \neq 3$ ),  $x_0 = 3$ .

f)  $f(x) = \cot x$ ,  $x \in ]-\pi, +\pi[$ ,  $x \neq 0$ ,  $x_0 = 0$ .

**4.3.**

Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf Stetigkeit an den angegebenen Stellen  $x_0$ .

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{für } x \leq 0 \\ \cos x & \text{für } x > 0 \end{cases} \quad x_0 = 0,$$

$$\text{b) } f(x) = \begin{cases} \sqrt{5-x} & \text{für } x < 2 \\ |x-3| & \text{für } x \geq 2 \end{cases} \quad x_0 = 2.$$

**4.4.**

Zeigen Sie, daß die Gleichung

$$x \cdot \lg x - 1 = 0$$

im Intervall  $]2, 3[$  mindestens eine Lösung hat.

**4.5.**

Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = \operatorname{sgn} x \quad x \in \mathbb{R}^1.$$

- 1) Notieren Sie den Wertevorrat von  $f$ .
- 2) Vergleichen Sie das Ergebnis von a) mit folgendem

(Satz:

*Die Funktion  $f$  sei auf dem Intervall  $I$  stetig. Dann ist der Wertevorrat, also die Menge  $\{f(x) : x \in I\}$ , ebenfalls ein Intervall.)*

(Letzte Aktualisierung: 20.02.05)