Kapitel III
Grenzwert einer Funktion

BS. 3. 1.

Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \frac{4x^2 - 1}{2x - 1}, \quad x \neq \frac{1}{2}$$

und die Folgen

$x_n^{'}$: 0.4, 0.49, 0.499, 0.4999, ...

$x_n^{"}$: 0.6, 0.51, 0.501, 0.5001, ...

Wir beobachten nun das Verhalten der Folgen $f(x_n^{'})$ und $f(x_n^{"})$:

$x_n^{'}$	0.4	0.49	0.499	0.4999	...
$f(x_n^{'})$	1.8	1.98	1.998	1.9998	...
$x_n^{"}$	0.6	0.51	0.501	0.5001	...
$f(x_n^{"})$	2.2	2.02	2.002	2.0002	...

Die Folgen $f(x_n^{'})$ und $f(x_n^{"})$ konvergieren vermutlich gegen 2.

D. 3. 1. **(*Grenzwert*)**

Die Funktion f sei (mindestens) in einer Umgebung von x_0 definiert. Eine Zahl g heißt *Grenzwert* von f für x gegen x_0, in Zeichen

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = g$$

oder

$$f(x) \to g \quad \text{für} \quad x \to x_0,$$

wenn für jede Folge $\{x_n\}$ mit den Eigenschaften

E_1 : $x_n \in D(f), \quad \forall n$

E_2 : $x_n \neq x_0, \quad \forall n$

E_3 : $\lim_{n \to \infty} x_n = x_0$

die Folge $\{f(x_n)\}$ gegen g konvergiert.

BS, 3, 2.
Wir zeigen, dass

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}} f(x) = \lim_{x\to\frac{1}{2}} \frac{4x^2-1}{2x-1} = 2$$

gilt:

$$f(x) = \frac{4x^2-1}{2x-1} = 2x+1, \quad x \neq \frac{1}{2}.$$

Es sei $\{x_n\}$ eine beliebige Folge mit $x \neq \frac{1}{2},\ \forall n$ und $\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{1}{2}$.
Dann gilt:

$$\lim_{n\to\infty} f(x) = \lim_{n\to\infty}\left(2x_n+1\right) = \lim_{n\to\infty} 2x_n + \lim_{n\to\infty} 1$$

$$= 2\cdot\lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} 1 = 2\cdot\frac{1}{2}+1 = 2.$$

BS, 3, 3.
Wir wollen den Grenzwert der Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{4x^2-1}{2x-1} & \text{für} \quad x \neq \dfrac{1}{2} \\ 3 & \text{für} \quad x = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

für $x \to \frac{1}{2}$ ermitteln:
Obwohl f an der Stelle $x = \frac{1}{2}$ definiert ist, werden auch hier nur Folgen $\{x_n\}$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{1}{2}$ betrachtet, für die $x \neq \frac{1}{2},\ \forall n$, gilt. Für jede solche Folge erhält man wie in BS. 3. 2.

$$\lim_{n\to\infty} f(x) = \lim_{n\to\infty}\left(2x_n+1\right) = 2.$$

BS, 3, 4.
Wir untersuchen das Verhalten der Funktion

$$f(x) = \frac{1}{x^2}, \quad x \neq 0$$

für $x \to 0$:
Dazu genügt es, *eine* Folge $\{x_n\}$ mit $x_n,\ \forall n$, und $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$, für die die Folge $\{f(x_n)\}$ divergent ist:

Setzen wir z. B.

$$x_n = \frac{1}{n}.$$

Dann gilt:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{n^2}} = +\infty.$$

<u>S. 3. 1.</u> ($\varepsilon - \delta -$*Charakterisierung des Grenzwertes*)
Die Funktion f sei (mindestens) in einer Umgebung der Stelle x_0 definiert.
Es gilt genau dann

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = g,$$

wenn zu jeder beliebig kleinen Zahl $\varepsilon > 0$ eine Zahl $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ existiert, so dass gilt

$$|f(x) - g| < \varepsilon$$

für alle x mit

$$|x - x_0| < \delta.$$

<u>B. 3. 1.</u> (*Geometrische Interpretation*)
$\lim_{x\to x_0} f(x) = g$ bedeutet geometrisch:
Zu jedem (noch so kleinen) „$\varepsilon -$ Streifen" um $y = g$ existiert ein „$\delta -$ Streifen" um $x = x_0$, so dass alle Punkte der Bildkurve von f, die in diesem „$\delta -$ Streifen" liegen (außer der Mittellinie $x = x_0$), auch dem vorgegebenen „$\varepsilon -$ Streifen" angehören. Dabei ist δ offenbar im allgemeinen um so kleiner zu wählen, je kleiner ε vorgegeben ist, was in der Schreibweise $\delta = \delta(\varepsilon)$ zum Ausdruck kommen soll.

<u>BS. 3. 5.</u>
Wir zeigen, dass

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}} \frac{4x^2-1}{2x-1} = 2, \quad x \neq \frac{1}{2},$$

gilt:
Es gilt nun

$$\frac{4x^2-1}{2x-1} = 2x+1, \quad x \neq \frac{1}{2}.$$

Sei $\varepsilon > 0$. Es muss ein $\delta > 0$ gefunden werden, so dass für alle x mit

$$0 < \left| x - \frac{1}{2} \right| < \delta$$

die Ungleichung

$$\left| (2x+1) - 2 \right| < \varepsilon$$

gilt. Es genügt $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ zu wählen. Dann gilt nämlich für x mit

$$0 < \left| x - \frac{1}{2} \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

die Beziehung

$$\begin{aligned} \left| (2x+1) - 2 \right| &= \left| 2x - 1 \right| \\ &= 2 \cdot \left| x - \frac{1}{2} \right| < 2 \cdot \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \,. \end{aligned}$$

<u>**D. 3. 2.**</u> **(*Einseitige Grenzwerte*)**
Die Funktion f sei (mindestens) in einem Intervall $]x_0,\ x_0 + \delta[,\ \delta > 0$, definiert. Eine Zahl g_r heißt *rechtseitiger Grenzwert* von f für x gegen x_0, in Zeichen

$$\lim_{x \to x_x^+} f(x) = g_r$$

oder

$$f(x) \to g_r \quad \text{für} \quad x \to x_0^+ \,,$$

wenn für jede Folge $\{x_n\}$ mit den Eigenschaften

$E_1:\quad x_n \in D(f),\ \ \forall n$

$E_2:\quad x_n > x_0,\qquad \forall n$

$E_3:\quad \lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$

die Folge $\{f(x_n)\}$ gegen g_r konvergiert.

Analog definiert man den *linksseitigen Grenzwert* g_r von f für x gegen x_0, in Zeichen

$$\lim_{x \to x_x^-} f(x) = g_l$$

oder

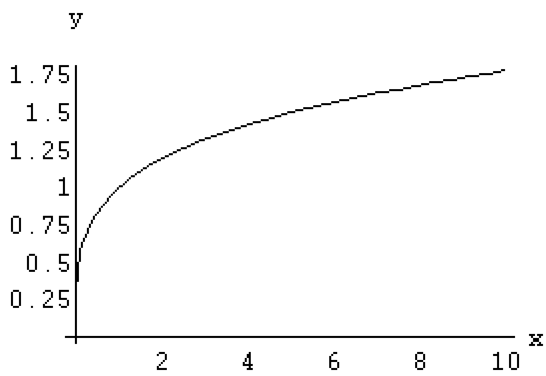
$$f(x) \to g_l \quad \text{für} \quad x \to x_0^-,$$

BS. 3. 6.
Wir zeigen

$$\lim_{x \to 0^+} \sqrt{x} = 0, \quad x > 0:$$

Für jede Folge $\{x_n\}$ mit $x_n > 0,\ \forall n$ und $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ ist

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{x_n} = 0:$$



BS. 3. 7.
Untersuchen Sie das Verhalten der Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{x} & \text{für} \quad 0 < x \le 3 \\ x - 1 & \text{für} \quad x > 3 \end{cases}$$

bei „Annäherung“ an die Stelle $x = 3$.

Lösung:
Sei $\{x_n\}$ eine beliebige Folge mit $0 < x_n < 3$ und $\lim_{n\to\infty} x_n = 3$. Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{x_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} 3}{\lim_{n\to\infty} x_n} = 1.$$

Daher ist $\lim_{x\to 3^-} f(x) = 1$.

Sei $\{x_n\}$ eine beliebige Folge mit $x_n > 3$ und $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 3$. Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty}(x_n - 1) = \lim_{n\to\infty} x_n - \lim_{n\to\infty} 1 = 3 - 1 = 2 .$$

Daher ist $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = 2$.

<u>S. 3. 2.</u>
Die Funktion f hat genau dann für x gegen x_0 einen Grenzwert, wenn die einseitigen Grenzwerte von f für x gegen x_0 existieren und übereinstimmen. In diesem Falle gilt:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x)$$

<u>D. 3. 3.</u>
Die Funktion f sei (mindestens) in einem Intervall $]a,\ +\infty[$, definiert. Eine Zahl g heißt *rechtseitiger Grenzwert* von f für x gegen $+\infty$, in Zeichen

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = g$$

oder

$$f(x) \to g \quad \text{für} \quad x \to +\infty ,$$

wenn für jede Folge $\{x_n\}$ in $D(f)$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ die Folge $\{f(x_n)\}$ gegen g konvergiert.

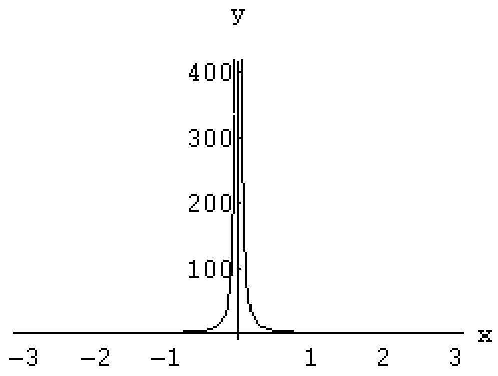
Analog definiert man $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = g$

<u>BS. 3. 8.</u>
Wir zeigen, dass

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^k} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^k} = 0, \quad k \in N \ :$$

Sei $\{x_n\}$ irgendeine gegen $+\infty$ oder $-\infty$ bestimmt divergente Folge mit $x_n \neq 0,\ \forall n$.
Dann gilt

$$\lim_{x\to\infty} f(x_n) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x_n^k} = 0 :$$



BS. 3. 9
Wir zeigen, dass

$$\lim_{x\to-\infty} a^x = 0, \quad a > 1:$$

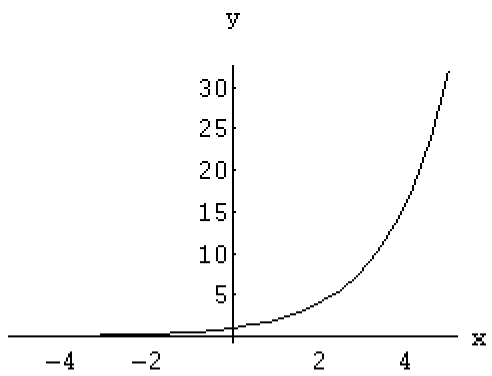
Sei $\{x_n\}$ eine beliebige Folge mit $\lim_{x\to\infty} x_n = -\infty,\ x_n \neq 0$. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine natürliche Zahl $N = N(\varepsilon)$, so dass

$$x_n < \log_a \varepsilon, \quad \forall n \geq N .$$

Da die Funktion $f(x) = a^x = 0,\ a > 1$, streng monoton wachsend ist, folgt

$$\left|a^{x_n} - 0\right| = a^{x_n} < \varepsilon, \quad \forall n \geq N .$$

Folglich ist $\lim_{n\to\infty} a^{x_n} = 0$. Da die Folge $\{x_n\}$ beliebig war. Ist die Behauptung bewiesen.



D. 3. 4 (*Bestimmt und bestimmt divergente Folgen*)
Die Funktion f heißt *bestimmt divergent gegen* $+\infty$ (bzw. $-\infty$) für eine der „Bewegungen“

$$x \to x_0, \quad x \to x_0^+, \quad x \to x_0^-,$$

$$x \to +\infty, \quad x \to -\infty$$

der unabhängigen Variablen x, wenn für jede dieser „Bewegungen“ realisierende Folge $\{x_n\}$ in $D(f)$ der Folge $\{f(x_n)\}$ bestimmt divergent gegen $+\infty$ (bzw. $-\infty$) ist.
Ist f für eine der obigen „Bewegungen“ weder konvergent noch bestimmt divergent, so heißt f *unbestimmt divergent.*

BS. 3. 10.
Wir zeigen, dass

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=+\infty$$

gilt:

Für jede Folge $\{x_n\}$ mit $x_n \neq 0,\ \forall n$, und $\lim_{n\to+\infty} x_n = 0$ ist die Folge $\left\{\frac{1}{x_n^2}\right\}$ bestimmt divergent gegen $+\infty$.

S. 3. 3.
Die Funktionen f_1 und f_2 seien für $x \to x_0$ konvergent mit

$$\lim_{x\to x_0} f_1(x) = g_1, \qquad \lim_{x\to x_0} f_2(x) = g_2 .$$

Dann gilt:

$$\lim_{x\to x_0}\left[f_1(x)+f_2(x)\right]=g_1+g_2,$$

$$\lim_{x\to x_0}\left[f_1(x)-f_2(x)\right]=g_1-g_2,$$

$$\lim_{x\to x_0}\left[c\cdot f_1(x)\right]=c\cdot g_1 \quad (c:\ \text{eine Konstante}),$$

$$\lim_{x\to x_0}\left[f_1(x)\cdot f_2(x)\right]=g_1\cdot g_2 .$$

Ist außerdem $f_2(x)\neq 0$ ür alle x einer Umgebung von x_0 und $g_2 \neq 0$, dann gilt auch

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f_1(x)}{f_2(x)}=\frac{g_1}{g_2}.$$

B. 3. 2.
Satz S. 3. 3. und die folgenden für die „Bewegung“ $x \to x_0$ formulierten Sätze gelten sinngemäß auch für die „Bewegungen“

$$x\to x_0, \quad x\to x_0^+, \quad x\to x_0^-,$$

$$x\to+\infty, \quad x\to-\infty$$

BS. 3. 11.
Gesucht ist der Grenzwert

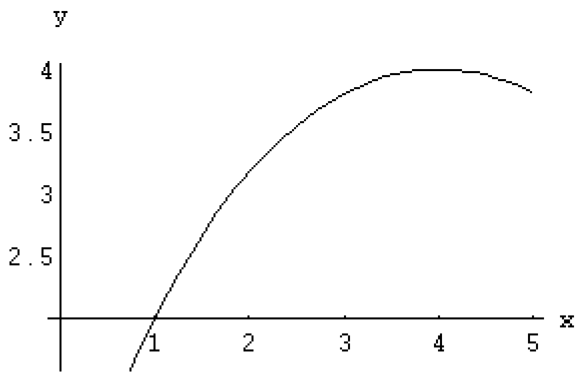
$$\lim_{x\to 2} x\cdot\left(3-\sqrt{x}\right).$$

Es gilt:

$$\lim_{x\to 2} x = 2, \qquad \lim_{x\to 2} 3 = 3, \qquad \lim_{x\to 2}\sqrt{x} = 2$$

und daher

$$\lim_{x\to 2} x\cdot\left(3-\sqrt{x}\right) = 2\cdot\left(3-\sqrt{2}\right):$$

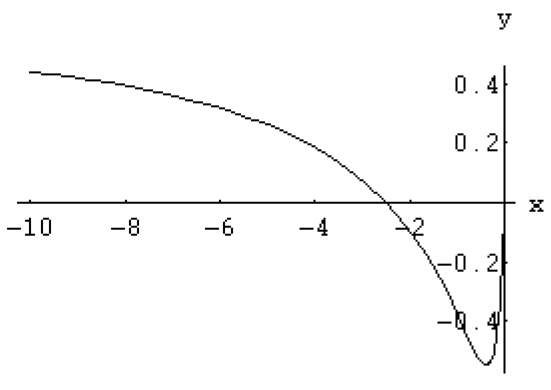


BS. 3. 12.
Es soll

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{2x^2+5x}{3x^2-4x+1}$$

berechnet werden:

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{2x^2+5x}{3x^2-4x+1} = \lim_{x\to -\infty}\frac{x^2\cdot\left(2+\frac{5}{x}\right)}{x^2\cdot\left(3-\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x\to -\infty}\frac{\left(2+\frac{5}{x}\right)}{\left(3-\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}\right)} = \frac{2+0}{3-0+0} = \frac{2}{3}.$$



S. 3. 4.
Es sei

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$$

und für alle x einer Umgebung von x_0 gelte:

$$f(x) > 0 \qquad \text{bzw.} \qquad f(x) < 0 .$$

Dann ist

$$\lim_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty \qquad \text{bzw.} \qquad \lim_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = -\infty$$

S. 3. 5.
Es sei

$$\lim_{x \to x_0} f_1(x) = \lim_{x \to x_0} f_2(x) = g$$

und für alle x einer Umgebung von x_0 gelte:

$$f_1(x) \le f(x) \le f_2(x) .$$

Dann gilt auch

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = g$$

(Letzte Aktualisierung: 11.10.05)