Kapitel III
Grenzwert einer Funktion
(Lösungen)

3. 1 .

a)

Für jede Folge $\{x_n\}_{n\in N}$ mit $x_n \neq 0$, $x_n \neq 1$ und $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$ gilt:

$$\lim_{x\to 0}\frac{3x+2}{x-1} = \frac{3\lim\limits_{n\to+\infty} x_n + \lim\limits_{n\to+\infty} 2}{\lim\limits_{n\to+\infty} x_n - \lim\limits_{n\to+\infty} 1} = -2 .$$

b)

Wegen

$$\frac{x^2-4}{x+2} = \frac{(x+2)\cdot(x-2)}{x+2} = x-2 , \qquad x \neq -2$$

erhält man:

Für jede Folge $\{x_n\}_{n\in N}$ mit $x_n \neq -2$ und $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = -2$ hat man

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \lim_{n\to+\infty}(x_n - 2) = -2-2 = -4 .$$

3. 2.

Für jede Folge $\{x_n\}_{n\in N}$ mit $x_n \neq 2$, $x_n \neq -\dfrac{1}{3}$ und $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 2$ gilt:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x+4}{3x+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{x_n+4}{3x_n+1} = \frac{6}{7} .$$

3. 3.

a)

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{5},\ \ldots\ \frac{1}{n},\ldots \qquad ; \qquad \lim_{n\to\infty} x_n = 0$$

$y \to 2$ über die Folge

$$3,\ \frac{5}{2},\ \frac{7}{3},\ \frac{9}{4},\ \frac{11}{5},\ \ldots\ 2+\frac{1}{n},\ldots$$

b)

$$2,\ \frac{5}{2},\ \frac{8}{3},\ \frac{11}{4},\ \frac{14}{5},\ \dots 3-\frac{1}{n},\dots\ ; \qquad \lim_{n\to\infty} x_n = 3$$

$y \to 5$ über die Folge

$$4,\ \frac{9}{2},\ \frac{14}{3},\ \frac{19}{4},\ \frac{24}{5},\ \dots 5-\frac{1}{n},\dots$$

c)

$$1,\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{9},\ \frac{1}{16},\ \frac{1}{25},\ \dots \left(\frac{1}{n}\right)^2,\dots\ ; \qquad \lim_{n\to\infty} x_n = 0$$

$y \to 2$ über die Folge

$$3,\ \frac{9}{4},\ \frac{19}{9},\ \frac{33}{16},\ \frac{51}{25},\ \dots 2+\frac{1}{n^2},\dots$$

3. 4.

1.

$(-1)^x \to -1$ über die Wertefolge -1, -1, -1, -1,...

2.

$(-1)^x \to +1$ über die Wertefolge +1, +1, +1, +1,...

Da $(-1)^x$ bei den beiden Folgen gegen verschiedene Grenzwerte konvergiert, existiert $\lim\limits_{x\to 0}(-1)^x$ *nicht*; es gilt $f(0) = (-1)^0 = +1$.

3. 5.

Sei

$$x_n = \frac{1}{n\cdot\pi}: \qquad \lim_{n\to+\infty} \sin\frac{1}{x_n} = \lim_{n\to\infty} 0 = 0$$

$$x_n = \frac{2}{(4n+1)\cdot\pi}: \qquad \lim_{n\to+\infty} \sin\frac{1}{x_n} = \lim_{n\to\infty} 1 = 1.$$

3. 6.

Mit $\varepsilon = 0.001$ muss eine geeignete Relation zwischen $|(4x-7)-1|$ und $|x-2|$ gefunden werden.

Wegen

$$|(4x-7)-1| = |4x-8| = 4\cdot|x-2| < 0.001$$

gilt

$$|x-2| < \frac{0.001}{4} = 0.00025.$$

Damit hat man stets für $\delta = 0.00025$:

$$0 < |x-2| < 0.00025 \;\Rightarrow\; |(4x-7)-1| < 0.001.$$

3. 7.

Die Ungleichung $\left|\left(\frac{1}{x^2}\right)-1\right| < 0.001$ kann folgendermaßen äquivalent umgeformt werden:

$$\begin{aligned}
\left|\left(\frac{1}{x^2}\right)-1\right| < 0.001 &\Leftrightarrow\; -0.001 < \frac{1}{x^2} - 1 < 0.001 \\
&\Leftrightarrow\; 1-0.001 < \frac{1}{x^2} - 1 < 1+0.001 \\
&\Leftrightarrow\; \frac{1}{1+0.001} < x^2 < \frac{1}{1-001} \\
&\Leftrightarrow\; \frac{1}{\sqrt{1+0.001}} - 1 < x-1 < \frac{1}{\sqrt{1-0.001}} - 1 \\
&\Leftrightarrow\; -0.00049961 < x-1 < 0.0005004.
\end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$|x-1| < \min\{|-0.0004996|, |0.005004|\}.$$

Für $\delta = 0.0004996$ hat man dann

$$|x-1| < 0.0004996 \;\Rightarrow\; \left|\frac{1}{x^2} - 1\right| < 0.001.$$

3. 8.

Wir müssen zeigen:

$$\forall\varepsilon > 0,\;\; \exists\delta > 0\text{, so dass } 0 < |x-1| < \delta \;\Rightarrow\; |(x^3+5x^2)-6| < \varepsilon:$$

$$\begin{aligned}
|(x^3+5x^2)-6| &= |(x-1)^3 + 8\cdot(x-1)^2 + 13\cdot(x-1)| \\
&\le |(x-1)^3| + |8\cdot(x-1)^2| + |13\cdot(x-1)| \\
&= |x-1|^3 + 8\cdot|x-1|^2 + 13\cdot|x-1|.
\end{aligned}$$

Sei nun $0 < \delta < 1$. Für $n \in N$ und $|x-1| < \delta$ erhält man $|x-1|^n < \delta$, d.h.

$$\left|x^3+5x^2-6\right| \le |x-1|^3+8\cdot|x-1|^2+13\cdot|x-1|$$

$$< \delta + 8\delta + 13\delta = 22\delta \,.$$

Für $22\delta \le \varepsilon$ erhält man $\delta \le \dfrac{\varepsilon}{22}$.

Wählt man nun $\delta < \min\{1, \dfrac{\varepsilon}{22}\}$, so gilt:

$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0$, so dass $0 < |x-1| < \delta \ \Rightarrow\ \left|\left(x^3+5x^2\right)-6\right| < \varepsilon$,

d.h. $\lim\limits_{x\to 1}\left(x^3+5x^2\right) = 6$.

3. 9.

(i)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+a}-\sqrt{a}}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x+a}-\sqrt{a}\right)\cdot\left(\sqrt{x+a}+\sqrt{a}\right)}{x\cdot\left(\sqrt{x+a}+\sqrt{a}\right)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x+a-a}{x\cdot\left(\sqrt{x+a}+\sqrt{a}\right)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1}{\left(\sqrt{x+a}+\sqrt{a}\right)}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{a}} \,.$$

(ii)

$$\lim_{x\to 1}\frac{1-x^3}{2-\sqrt{x^2+3}} = \lim_{x\to 1}\frac{\left(1-x^3\right)\cdot\left(2+\sqrt{x^2+3}\right)}{\left(2-\sqrt{x^2+3}\right)\cdot\left(2+\sqrt{x^2+3}\right)}$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{(1-x)\cdot\left(1+x+x^2\right)\cdot\left(2+\sqrt{x^2+3}\right)}{4-\left(x^2+3\right)}$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{(1-x)\cdot\left(1+x+x^2\right)\cdot\left(2+\sqrt{x^2+3}\right)}{(1-x)\cdot(1+x)}$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{\left(1+x+x^2\right)\cdot\left(2+\sqrt{x^2+3}\right)}{(1+x)}$$

$$= \frac{(1+1+1)\cdot(2+2)}{1+1} = 6.$$

3. 10.

a)

Der Nenner ist Null für $x = -2$ und $x = 1$.

Für	$x \to -2^-$	gilt	$y \to -\infty$
	$x \to -2^+$	gilt	$y \to +\infty$
	$x \to 1^-$	gilt	$y \to +\infty$
	$x \to 1^+$	gilt	$y \to -\infty$

b)

Der Nenner ist Null für $x = 3$

Für	$x \to 3^-$	gilt	$y \to +\infty$
	$x \to 3^+$	gilt	$y \to +\infty$

3. 11.

Die Aussage

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} = b$$

möge für ein $b \in R$ wahr sein. Betrachtet sei nun das Geradepaar $y = b \pm \varepsilon$.

Unter der Voraussehung $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x} = b$ lässt sich ein Intervall $]-\delta,\ 0[\cup\ ]0,\ \delta[$, finden, so dass für jedes $x \in]-\delta,\ 0[\cup\ ]0,\ \delta[$, der Punkt $\left(x, \frac{1}{x}\right)$ der Kurve zwischen den horizontalen Linien $y = b - \varepsilon$ und $y = b + \varepsilon$ liegen muss.. Nicht jeder Punkt aus $]-\delta,\ 0[\cup\ ]0,\ \delta[$ besitzt allerdings die genannte Eigenschaft, weil der Wert $\frac{1}{x}$ beliebig groß werden kann , je näher er von rechts gegen 0 geht. Dies widerspricht aber der Voraussetzung, dass $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x}$ existiert.

3. 12.

a)

$$\lim_{x\to 0} \frac{x+2}{x^2-1} = \frac{2}{-1} = -2.$$

b)

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+2}{x^2-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(1+\frac{2}{x}\right)}{x^2\cdot\left(1-\frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} \cdot \lim_{x\to+\infty} \frac{1+\frac{2}{x}}{1-\frac{1}{x^2}} = 0.$$

c)

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2-3x}{x^3+7}+\frac{4x^3-5}{2x^3+7}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\frac{1}{x}-\frac{3}{x^2}}{1+\frac{7}{x^3}}+\frac{4-\frac{5}{x^3}}{2+\frac{7}{x^3}}\right)=0+2=2\,.$$

d)

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+3}{x+2}=\lim_{x\to+\infty}\left(x+\frac{3-2x}{x+2}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(x+\frac{\frac{3}{x}-2}{1+\frac{2}{x}}\right)=+\infty\,.$$

e)

$$\lim_{x\to0}\frac{\tan x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to0}\frac{1}{\cos x}=1\,.$$

f)

Wegen $-\frac{1}{x}\le\frac{\sin x}{x}\le\frac{1}{x},\quad\forall x>0$, und $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ gilt:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{x}=0\,.$$

3. 13.

a)

$$\lim_{x\to3}\frac{x-2}{x+2}=\frac{\lim_{x\to3}(x-2)}{\lim_{x\to3}(x+2)}=\frac{1}{5}.$$

b)

$$\lim_{x\to-2}\frac{x^2-4}{x^2+2}=\frac{4-4}{4+4}=0.$$

c)

$$\lim_{x\to4}\sqrt{25-x^2}=\sqrt{\lim_{x\to4}(25-x^2)}=\sqrt{9}=3\,.$$

3. 14.

a)

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x-2}{9x+7}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3-\frac{2}{x}}{9+\frac{7}{x}}=\frac{3-0}{9+0}=\frac{1}{3}.$$

b)

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{6x^2+2x+1}{6x^2-3x+4}=\lim_{x\to+\infty}\frac{6+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}{6-\frac{3}{x}+\frac{4}{x^2}}=\frac{6+0+0}{6-0+0}=1.$$

c)

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+x-2}{4x^3-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x^3}}{4-\frac{1}{x^3}}=\frac{0}{4}=0.$$

d)

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^3}{x^2+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}}=+\infty,$$ d.h. der Grenzwert existiert nicht.

3. 15.

a)

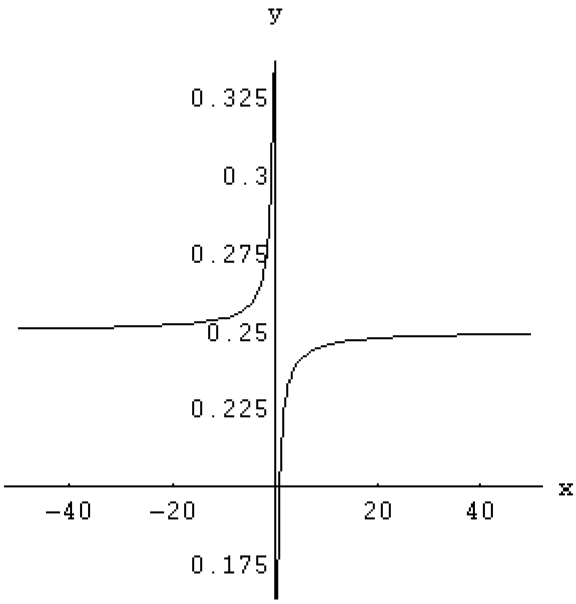
Aus $x\to 0^-$ folgt $\frac{1}{x}\to-\infty,\ 2^{\frac{1}{x}}\to 0$ und damit

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{3+2^{\frac{1}{x}}}=\frac{1}{3}.$$

Aus $x\to 0^+$ folgt $\frac{1}{x}\to+\infty,\ 2^{\frac{1}{x}}\to+\infty$ und damit

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{3+2^{\frac{1}{x}}}=0.$$

Also existiert $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{3+2^{\frac{1}{x}}}$ nicht.



b)

Aus $x \to 0^-$ folgt $2^{\frac{1}{x}} \to 0$ und damit

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1+2^{\frac{1}{x}}}{3+2^{\frac{1}{x}}} = \frac{1}{3}.$$

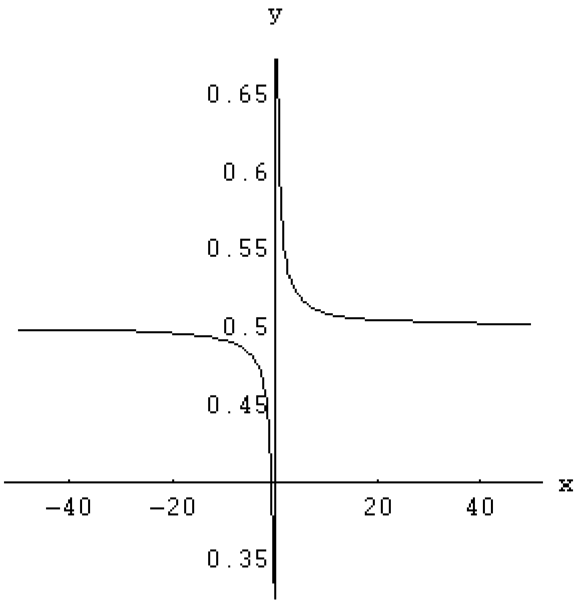
Aus $x \to 0^+$ folgt

$$x \neq 0,\ \frac{1+2^{\frac{1}{x}}}{3+2^{\frac{1}{x}}} = \frac{2^{-\frac{1}{x}}+1}{3\cdot 2^{-\frac{1}{x}}+1}$$ (Nenner und Zähler durch $2^{\frac{1}{x}}$ geteilt.)

und damit mit $\lim\limits_{x\to 0^+} 2^{-\frac{1}{x}} = 0$:

$$.\ \lim_{x\to 0^+} \frac{2^{-\frac{1}{x}}+1}{3\cdot 2^{-\frac{1}{x}}+1} = 1.$$

Also existiert $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1+2^{\frac{1}{x}}}{3+2^{\frac{1}{x}}}$ nicht.



3. 16.
Wegen

$$\frac{|x|}{x}=\begin{cases}\dfrac{x}{x}=1 & \text{für} \quad x>0\\ -\dfrac{x}{x}=-1 & \text{für} \quad x<0\end{cases}$$

gilt:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\frac{|x|}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\frac{|x|}{x}=-1$$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\dfrac{|x|}{x}$ existiert nicht.

3. 17.
a).

$$\lim_{x\to 0}\left(e^{\cos x}+\tan 2x\right)=e\,.$$

b)

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{\arcsin x}{x^2+1}=\frac{\frac{\pi}{2}}{2}=\frac{\pi}{4}\,.$$

c)
Wegen

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{2n+1}{n+3}=2$$

und der Stetigkeit von $f(x)=\sqrt{x}$ an der Stelle $x=2$ gilt:

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{2n+1}{n+3}}=\sqrt{\lim_{n\to+\infty}\frac{2n+1}{n+3}}=\sqrt{2}\,.$$

d)
Wegen

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$$

und der Stetigkeit von $f(x)=\ln x$ an der Stelle $x=e$ gilt:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(n\cdot\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)=\lim_{n\to+\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\ln e=1$$

3. 18.

$$f(x)=x^2-3x\,,\qquad f(x+h)=(x+h)^2-3\cdot(x+h),$$

$$\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\left(x^2+2h\cdot x+h^2-3x-h\right)-\left(x^2-3x\right)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{2h\cdot x+h^2-3h}{h}=\lim_{h\to0}(2x+h-3)=2x-3\,.$$

3. 19.

$$\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\sqrt{5\cdot(x+h)+1}-\sqrt{5x+1}}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{\sqrt{5\cdot(x+h)+1}-\sqrt{5x+1}}{h}\cdot\frac{\sqrt{5\cdot(x+h+1)}+\sqrt{5x+1}}{\sqrt{5\cdot(x+h)+1}+\sqrt{5x+1}}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{(5\cdot(x+h)+1)-(5x+1)}{h\cdot\sqrt{5x+5h+1}+\sqrt{5x+1}}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{5}{\sqrt{5x+5h+1}+\sqrt{5x+1}}$$

$$=\frac{5}{2\cdot\sqrt{5x+1}}$$

(Letzte Aktualisierung: 20.02.05)