

Kapitel III

Grenzwert einer Funktion (Aufgaben)

3. 1.

Ermitteln Sie die folgenden Grenzwerte:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x+2}{x-1}, \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2-4}{x+2}.$$

3. 2.

Berechnen Sie

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+4}{3x+1}, \quad x \neq \frac{1}{3}.$$

3. 3.

Untersuchen Sie das Verhalten von

$$f(x) = x + 2,$$

wenn x die Werte der Folgen

a)

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots$$

b)

$$2, \frac{5}{2}, \frac{8}{3}, \frac{11}{4}, \frac{14}{5}, \dots$$

c)

$$1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \frac{1}{25}, \dots$$

3. 4.

Untersuchen Sie das Verhalten von

$$f(x) = (-1)^x,$$

wenn x die Folgen

$$1. \quad \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}, \dots$$

$$2. \quad \frac{2}{3}, \frac{2}{5}, \frac{2}{7}, \frac{2}{9}, \dots$$

durchläuft.

Was kann über $f(x) = (-1)^x$ und $f(0)$ gesagt werden?

3. 5.

Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f(x) = \sin \frac{1}{x}, \quad x \neq 0,$$

für $x \rightarrow 0$ keinen Grenzwert hat.

3. 6.

Sei

$$\lim_{x \rightarrow 2} (4x - 7) = 1.$$

Gesucht ist ein δ , so dass

$$|(4x - 7) - 1| < 0.001.$$

3. 7.

Sei

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x^2} = 1.$$

Gesucht ist ein δ , so dass

$$\left| \left(\frac{1}{x^2} \right) - 1 \right| < 0.001.$$

3. 8.

Zeigen Sie

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x^3 + 5x^2) = 6.$$

3. 9.

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte

(i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+a} - \sqrt{a}}{x}, \quad a > 0,$

(ii) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x^3}{2 - \sqrt{x^2 + 3}}$

3. 10.

Bestimmen Sie die Punkte $x = a$, für die der Nenner Null ist. Untersuchen Sie dann y für $x \rightarrow a^-$ und $x \rightarrow a^+$.

$$\text{a) } y = f(x) = \frac{x-3}{(x+2) \cdot (x-1)},$$

$$\text{b) } y = f(x) = \frac{(x+2) \cdot (x-1)}{(x-3)^2}$$

3. 11.

Zeigen Sie, dass

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$$

nicht existiert

3. 12.

Berechnen Sie folgende Grenzwerte:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+2}{x^2-1},$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+2}{x^2-1},$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2-3x}{x^3+7} + \frac{4x^3-5}{2x^3+7} \right),$$

$$\text{d) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+3}{x+2},$$

$$\text{e) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x},$$

$$\text{f) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x}.$$

3. 13.

Bestimmen Sie

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-2}{x+2},$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2-4}{x^2+2},$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow 4} \sqrt{25-x^2}$$

3. 14.

Berechnen Sie

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x-2}{9x+7},$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x^2+2x+1}{6x^2-3x+4},$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+x-2}{4x^3-1},$$

$$\text{d) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3}{x^2+1}.$$

3. 15.

Untersuchen Sie

1.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{3 + 2^{\frac{1}{x}}},$$

2.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + 2^{\frac{1}{x}}}{3 + 2^{\frac{1}{x}}}.$$

3. 16.

Untersuchen Sie das Verhalten der Funktion

$$f(x) = \frac{|x|}{x}, \quad x \neq 0, \quad \text{für } x \rightarrow 0^+, x \rightarrow 0^- \quad \text{und } x \rightarrow 0.$$

3. 17.

Berechnen Sie folgende Grenzwerte:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} (e^{\cos x} + \tan 2x),$

b) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\arcsin x}{x^2 + 1},$

c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n+1}{n+3} = 2,$

d) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$

3. 18.

Es sei

$$f(x) = x^2 - 3x.$$

Berechnen Sie

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

3. 19.

Es sei

$$f(x) = \sqrt{5x+1}.$$

Bestimmen Sie

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \quad \text{falls } x > -\frac{1}{5}.$$

(Letzte Aktualisierung: 20.02.05)