Kapitel II
Funktionen reeller Variabler

<u>D. 2. 1.</u> (*Funktion*)
Es sei $f \subseteq XxY$ eine Abbildung. Die Abbildung f heiß *Funktion*, falls sie eindeutig ist.
Man schreibt dann auch:

$$f: X \to Y$$
$$f(x) = y,$$

wobei y das (eindeutig bestimmte) Bild des Urbildes x ist.
Im Falle

$$X \subseteq R^n, \quad Y \subseteq R^1$$

spricht man von einer *reellwertigen Funktion von* n *reellen Variablen*.

<u>B. 2. 1.</u>
Im weiteren werden vor allem reellwertige Funktionen <u>einer</u> reeller Variabler betrachtet.
Dabei wird für solche Funktionen folgende Schreibweise gewählt:

$$f: y = f(x), \quad x \in D(f).$$

<u>S. 2. 1.</u>
Gegeben seien die Funktionen:

$$f_i: y = f_i(x), \quad x \in D(f_i), \quad i = 1,\ 2.$$

Es gilt:

$$f_1 = f_2 \quad \Leftrightarrow \quad D(f_1) = D(f_2) \wedge f_1(x) = f_2(x), \quad \forall x \in D(f_1)\ (= D(f_2)).$$

(D.h. zwei Funktionen sind gleich genau dann, wenn ihre Definitionsbereiche gleich sind und sie für jedes Argument x aus dem Definitionsbereich gleiche Funktionswerte besitzen.)

<u>BS. 2. 1.</u>
Gegeben seien die Funktionen:

$$f_1: y = \sqrt{(x-5)\cdot(x+3)}, \quad x \in D(f_1) =]-\infty,\ 3] \cup [5,\ +\infty[,$$

$$f_2: y = \sqrt{(x-5)\cdot(x+3)}, \quad x \in D(f_2) = [5,\ +\infty[,$$

$$f_3: y = \sqrt{x-5}\cdot\sqrt{x+3}, \quad x \in D(f_3) = [5,\ +\infty[.$$

Es gilt $f_2 = f_3$ (nur unterschiedliche Schreibweisen). Dagegen gilt $f_1 \neq f_2$ (wegen $D(f_1) \neq D(f_2)$.

<u>D. 2. 2.</u> (*Erweiterung einer Funktion*)
Die Funktion

$$y = g(x), \quad x \in D(g)$$

heißt *Erweiterung* der Funktion

$$y = f(x), \quad x \in D(f),$$

wenn gilt

1. $D(f) \subset D(g)$,
2. $f(x) = g(x), \quad \forall x \in D(f)$.

<u>BS. 2. 2.</u>
Die Funktion

$$y = x^2 \text{-} 4x \text{-} 5, \;\; x \in \boldsymbol{R}^1$$

ist eine Erweiterung der beiden folgenden Funktionen:

$$y = x^2 \text{-} 4x \text{-} 5, \;\; x \in \left]-\infty, \; 0\right]$$

$$y = x^2 \text{-} 4x \text{-} 5, \;\; x \in \left[2, \; +\infty\right[.$$

<u>BS. 2. 3.</u>
Die Funktion

$$y = \begin{cases} x^2 - 4x - 5 & x \in \left]-\infty, \; 0\right] \\ 3x & x \in \left]2, \; +\infty\right] \end{cases}$$

ist eine Erweiterung der Funktion

$$y = x^2 \text{-} 4x \text{-} 5, \;\; x \in \left]-\infty, \; 0\right].$$

Eine solche Funktion heißt auch eine *zusammengesetzte* Funktion.

<u>BS. 2. 4.</u>
Die (zusammengesetzte) Gesamtkostenfunktion eines Betriebes in Abhängigkeit von der Produktionsmenge x lautet:

$$K(x)=\begin{cases}10+x & x\in[0,\ 100]\\ 60+0.5x & x\in\,]100,\ 500]\\ 185+0.25x & x\in\,]500,\ 1000]\end{cases}$$

D. 2. 3. **(*Inverse Funktion* bzw. *Umkehrfunktion*)**
Ist die Umkehrabbildung f^{-1} einer Funktion

$$f:\ y=f(x),\quad x\in D(f)$$

selbst eine Funktion, so wird f^{-1} *Umkehrfunktion* (oder auch *inverse Funktion*) von f genannt.

S. 2. 2
Die Eindeutigkeit einer Funktion ist notwendig und hinreichend dafür, dass sie eine Umkehrfunktion besitzt.

BS. 2. 4.
Ermitteln Sie die Umkehrfunktion für die Funktion

$$f:\ y=\frac{1}{2}x+1,\quad x\in[0,\ 1].$$

Lösung:

$$f^{-1}:\ x=2y-2,\quad x\in[0,\ 1],$$

$$D\left(f^{-1}\right)=W(f)=\left[1,\ \frac{3}{2}\right].$$

BS. 2. 5.
Ermitteln Sie die Umkehrfunktion für die Nachfragefunktion

$$f:\ p=10-\frac{1}{2}x,\quad x\in[0,\ 20]$$

mit

x: Nachfrage; p: Preis.

Lösung:

$$f^{-1}:\ x=20-2p,\quad p\in[0,\ 10],$$

$$D\left(f^{-1}\right)=W(f)=[0,\ 10].$$

S. 2. 3
Die Umkehrfunktion einer Funktion, die selbst schon Umkehrfunktion einer anderen Funktion f ist, existiert. Es gilt

$$\left(f^{-1}\right)^{-1} = f$$

D. 2. 4. (*Beschränktheit*)
Eine Funktion

$$f:\ y = f(x), \quad x \in D(f)$$

heißt auf der Menge $M \subseteq D(f)$ *beschränkt*, wenn es eine endliche Konstante C derart gibt, dass

$$\left|f(x)\right| \leq C, \quad \forall x \in M$$

gilt. Dabei wird C eine *Schranke* von f auf M genannt.

D. 2. 5. (*Beschränktheit nach unten bzw. nach oben*)
Eine Funktion

$$f:\ y = f(x), \quad x \in D(f)$$

heißt auf der Menge $M \subseteq D(f)$ *nach unten* bzw. *nach oben beschränkt*, wenn es eine endliche Konstante C_1 bzw. C_2 derart gibt, dass

(2. 1.) $$C_1 \leq \left|f(x)\right|, \quad \forall x \in M$$

bzw.

(2. 2.) $$\left|f(x)\right| \leq C_2, \quad \forall x \in M$$

gilt. Dabei werden C_1 bzw. C_2 *untere* bzw. *obere Schranke* von f auf M genannt.

S. 2. 4.
Für die Beschränktheit einer Funktion f auf $M \subseteq D(f)$ ist notwendig und hinreichend, dass f auf M sowohl nach oben als auch nach unten beschränkt ist.

Beweis:
Die Notwendigkeit folgt unmittelbar aus

$$-C \leq f(x) \leq C .$$

Umgekehrt ergibt sich die Beschränktheit aus (2. 1.) und (2. 2.), wenn

$$C := \max\left(\left|C_1\right|, \left|C_2\right|\right)$$

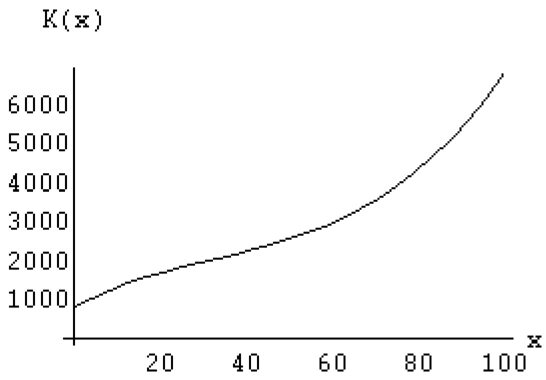
gesetzt wird.

BS. 2. 6.

1.

Die ertragsgesetzliche Kostenfunktion

$$K(x) = 0.01x^3 - x^2 + 60x + 800, \quad x \in [0,\ 100]$$



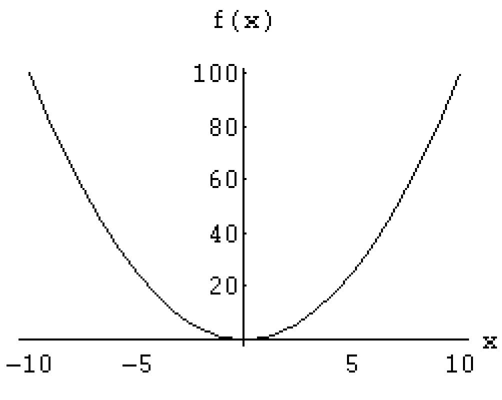
ist beschränkt.. Es gilt nämlich:

$$800 \le K(x) \le 6088$$

2.

Die Funktion

$$f: \quad y = x^2,\ x \in \left]-\infty,\ +\infty\right[$$



ist nur nach unten beschränkt. Es gilt nämlich:

$$0 \le x^2 = f(x)\,.$$

<u>D. 2. 6.</u> (*Monotonie*)
Eine Funktion

$$f:\ y = f(x), \quad x \in D(f)$$

heißt in dem Intervall $I \subseteq D(f)$ *monoton wachsend*, wenn

(2. 3.) $\qquad f(x_1) \leq f(x_2), \quad \forall x_1, x_2 \in I \text{ mit } x_1 < x_2$

gilt; entsprechend wird sie *monoton fallend in* I genannt, wenn

(2. 4.) $\qquad f(x_1) \geq f(x_2), \quad \forall x_1, x_2 \in I \text{ mit } x_1 < x_2$

gilt.
Treten in den Ungleichungen (2. 3.) bzw. (2. 4.) die Gleichheitszeichen auf, so wird f entsprechend *streng monoton wachsend* bzw. *streng monoton fallend* in I genannt.

<u>BS. 2. 7.</u>
Wir zeigen, dass

$$y = \ln x, \quad x \in \left]0,\ +\infty\right[$$

streng monoton wachsend ist:

Seien $x_1, x_2 \in \left]0,\ +\infty\right[$ beliebig mit $x_1 < x_2$. Dann gilt die Darstellung

$$x_1 = a x_2, \quad 0 < a < 1.$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} \ln x_1 &= \ln a x_2 \\ &= \ln a + \ln x_2 \\ &< \ln x_2 \qquad (\because\ \ln a < 0) \end{aligned}$$

<u>S. 2. 5.</u>
1.
Wenn f_1 und f_2 im gleichen Intervall I streng monoton wachsend sind, dann ist die Summe $f_1 + f_2$ der beiden Funktionen sowie das Produkt $a \cdot f_i,\ i = 1,\ 2,$ für $a > 0$ in I ebenfalls streng monoton wachsend; dagegen ist $a \cdot f_i,\ i = 1,\ 2,$ für $a < 0$ in I streng monoton fallend.

2.
Wenn f in I streng monoton ist, dann existiert die inverse Funktion f^{-1}.
(Die Umkehrung gilt im allgemeinen nicht!)

3.
Wenn f in I streng monoton wachsend ist, so ist f^{-1} mit

$$D(f^{-1}) = \left\{ x \mid x \in R^1 \wedge x = f(u),\ u \in I \right\}$$

in jedem Intervall $I^{-1} \subseteq D(f^{-1})$ ebenfalls streng monoton wachsend.
Analoges gilt für streng monoton fallende Funktionen.

Beweis:
Wir beschränken uns auf den Beweis der 1. Behauptung:
Sei $x_1, x_2 \in I$ mit $x_1 < x_2$ beliebig. Aus den Voraussetzungen über f_1 und f_2 folgt dann:

$$f_1(x_1) < f_1(x_2)\,,$$

$$f_2(x_1) < f_2(x_2)\,,$$

d. h.

$$f_1(x_1) + f_2(x_1) < f_1(x_2) + f_2(x_2)$$

bzw.

$$a \cdot f_i(x_1) > a \cdot f_i(x_2) \quad \text{mit} \quad a < 0\,.$$

<u>D. 2. 7.</u> (*Konvexität und Konkavität*)
Eine Funktion $y = f(x),\ x \in D(f)$, heißt im Intervall $I \subseteq D(f)$, *konvex*, wenn

(2. 5.) $$f\left(\alpha x_1 + (1-\alpha) x_2\right) \le \alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2), \quad \forall x_1, x_2 \in I; \;\; \forall \alpha \in [0,\ 1]$$

gilt.
Entsprechend wird sie in I konkav genannt, wenn

$$f\left(\alpha x_1 + (1-\alpha) x_2\right) \ge \alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2), \quad \forall x_1, x_2 \in I; \;\; \forall \alpha \in [0,\ 1]$$

gilt.

<u>B. 2. 2.</u>
Der Nachweis der Konvexität für stetige Funktionen lässt sich vereinfachen; für sie genügt es nämlich zu zeigen, dass (2. 5.) für $\alpha = \frac{1}{2}$ erfüllt ist.

<u>BS. 2. 8.</u>
Wir zeigen, dass die Funktion

$$y = e^{ax}, \quad x \in R^1 \setminus \{0\}$$

konvex ist:

$$\frac{1}{2}e^{ax_1}+\frac{1}{2}e^{ax_2}-e^{a\left(\frac{x_1}{2}+\frac{x_2}{2}\right)}=\frac{1}{2}\left(e^{\frac{ax_1}{2}}-e^{\frac{ax_1}{2}}\right)\geq 0\,.$$

B. 2. 3.
Eine lineare Funktion ist in ihrem gesamten Definitionsbereich sowohl konvex als auch konkav.

S. 2. 3.
f_1 und f_2 seien in dem gleichen Intervall konvexe Funktionen.

1. $f_1 + f_2$ ist konvex.
2. $a \cdot f_1$ ist konvex für $a > 0$ und konkav für $a < 0$.

D. 2. 8. ***(Gerade und ungerade Funktionen)***
Eine Funktion $y = f(x),\ x \in D(f)$ heißt *gerade*, wenn

$$D(f) = [-a,\ a],\quad a > 0 \qquad (\text{bzw.}\, D(f) =]a,\ a[\,)$$

gilt und

(2. 7.) $$f(-x) = f(x),\quad \forall x \in D(f),\ x > 0\,;$$

entsprechend heißt sie *ungerade*, wenn statt (2. 7.)

$$f(-x) = -f(x),\quad \forall x \in D(f),\ x > 0$$

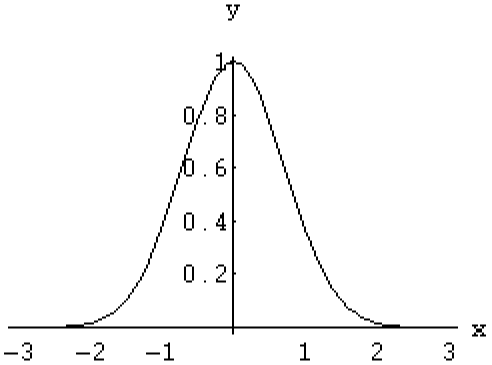
gilt.

BS .2. 9.
1.
Die Funktion

$$y = e^{-x^2}$$

ist gerade:

$$f(x) = e^{-x^2} = e^{-(-x)^2} = f(-x)\,.$$

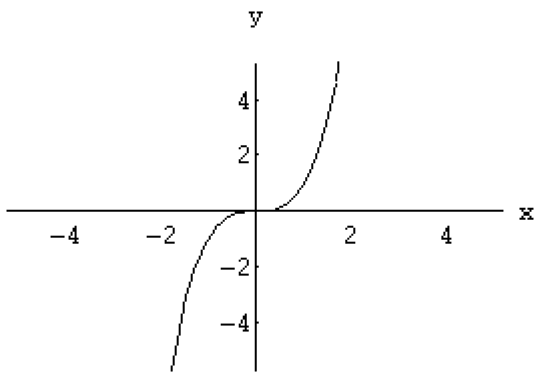


2.
Die Funktion

$$y = x^3$$

ist ungerade:

$$f(x) = x^3 = -(-x)^3 = -f(-x)\ .$$



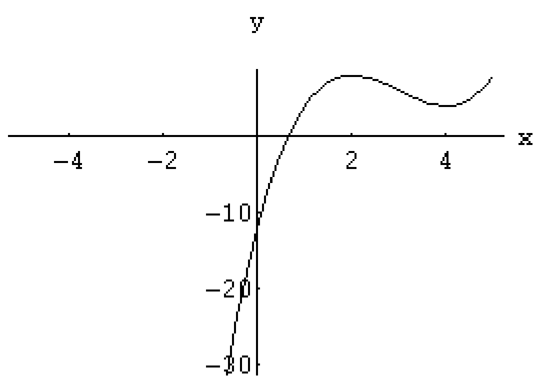
3.
Die Funktion

$$y = x^3 - 9x^2 + 24x - 12$$

ist weder gerade noch ungerade:

$$f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 12 \neq (-x)^3 - 9\cdot(-x)^2 + 24\cdot(-x) - 12 = f(-x)\,,$$

$$f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 12 \neq -\left((-x)^3 - 9\cdot(-x)^2 + 24\cdot(-x) - 12\right) = -f(-x)$$



<u>D. 2. 9.</u> (*Periodische Funktion*)
Eine Funktion $y = f(x),\ x \in D(f)$, heißt *periodisch*, mit der *Periode* α, wenn α eine positive Zahl ist, mit der die Identität

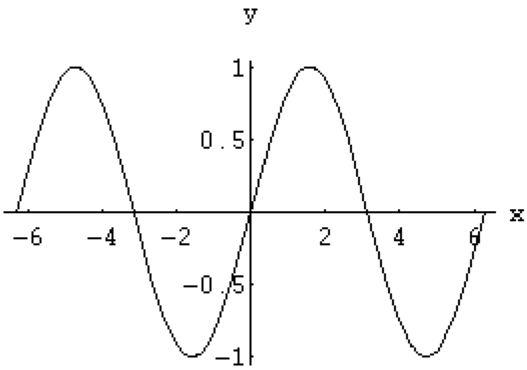
(2. 8.) $$f(x+\alpha) = f(x)$$

für alle diejenigen $x \in D(f)$ erfüllt ist, für die auch gleichzeitig $x+\alpha \in D(f)$ gilt.
Dabei wird die kleinste positive Zahl α, mit der (2. 8.) gilt, *primitive Periode* genannt.

BS. 2. 10.
Die Funktion

$$f: \quad y = \sin x,\ x \in R^1$$

ist periodisch mit der primitiven Periode 2π:



D. 2. 10. (*Verkettete Funktion*)
Es seien

$$f: \quad y = f(u),\ u \in D(f)$$

$$g: \quad \mathrm{u} = g(x),\ x \in D(g).$$

Dabei gelte $W(g) \subseteq D(f)$. Dann heiß die Funktion

$$y = f(g(x)), \quad x \in D(g)$$

mittelbare Funktion oder Verkettung der Funktionen f und g.

BS. 2. 11.
Gegeben seien die Funktionen

$$f: \quad y = x^4 + 1,\ x \in R^1,$$

$$g: \quad y = \sqrt{x},\ x > 0$$

$$g(f(x)) = \sqrt{f(x)} = \sqrt{x^4 + 1}$$

BS. 2. 12.
Die Abhängigkeit der in einer Periode abgesetzten Menge x eines Produktes vom Preis p sei durch die Funktion

$$x(p) = 3900 - 30p - p^2, \qquad 0 \leq p \leq 45$$

gegeben. Die Gesamtkosten $K(x)$ für die Produktion der abgesetzten Menge x möge durch

$$K(x) = 2000 + 30x$$

gegeben sein.
Zu ermitteln sei die Kostenfunktion in Abhängigkeit vom Preis.

Lösung:

$$\begin{aligned} K(p) &= 2000 + 30x \\ &= 2000 + 30(3900 - 30p - p^2) \end{aligned}$$

$$K(p) = 119000 - 900p - 30p^2, \quad 0 \leq p \leq 45.$$

D. 2. 11. (*Elementare Funktionen*)
Jede Funktion, die sich durch endlich viele Operationen der Grundrechenarten sowie durch Verkettung aus den Grundfunktionen darstellen lässt, nennt man *elementare Funktion*.

(Letzte Aktualisierung: 23.09.05)