Kapitel II
Funktionen reeller Variabler
(Lösungen)

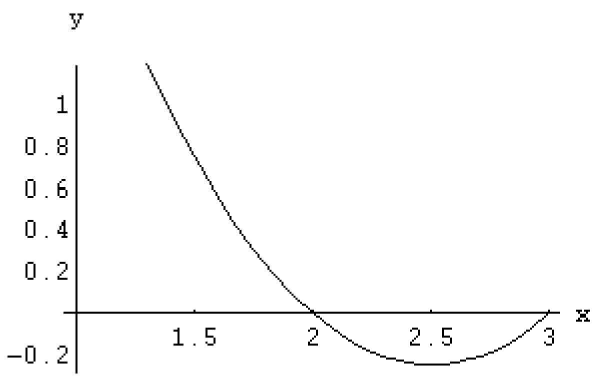
2. 1.
Für die gesuchten Zahlen muss gelten:

$$a_1 = a_1 = a \quad \text{mit} \quad a \geq 3 .$$

2. 2.
Die Zahlen $a_1 = -3$, $b_1 = -1$, $a_2 = 1$, $b_2 = 3$ erfüllen die gestellten Forderungen.

2. 3.
Für die angegebene Werte ergibt sich folgende Wertetabelle:

x	1	$\frac{5}{4}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{7}{4}$	2	$\frac{9}{4}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{11}{4}$	$\frac{3}{4}$
y	2	$\frac{21}{16}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{5}{16}$	0	$-\frac{3}{16}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{3}{16}$	0



2. 4.

$$4x - 20 \geq 0 , \quad x \geq 5 ,$$

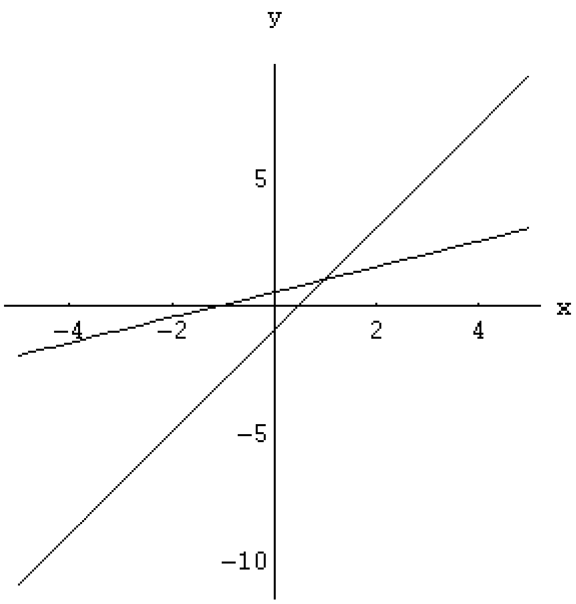
$$D = [5, \ +\infty[.$$

2. 5.
Aus $x \in [0, \ 3]$ oder $0 \leq x \leq 3$ folgt zunächst $0 \leq 2x \leq 6$ und schließlich $-1 \leq 2x - 1 \leq 5$, so dass $W(f) = [-1, \ 5]$ gilt.
Weiter ergibt die Elimination von x aus $y = 2x - 1$ die Beziehung

$$x = \frac{1}{2}(y+1)$$

und nach Umbenennung der Variablen

$$f^{-1}: \quad y = \frac{1}{2} \cdot (x+1), \qquad x \in [-1, 5]$$



2. 6.

f ist eine Parabel. Von einer Parabel sind jedoch immer nur die einzelnen „Äste" links bzw. rechts vom Scheitelpunkt eineindeutige Funktionen.
Wir ermitteln nun den Scheitelpunkt von f :

$$x^2 - 2x - 3 = (x-1)^2 - 4$$

Damit lautet die $x-$Koordinate des Scheitelpunktes $x_s = 1$.
Daher muss $1 \le a$ gelten.
Wir wählen $a = 1$:

$$1 \le x \le 4 \quad \Rightarrow \quad -4 \le x^2 - 2x - 3 \le 5,$$

so dass $W_f = [-4, \ 5]$ gilt.
Die formale Elimination von x aus $y = x^2 - 2x - 3$ ergibt $x = 1 \pm \sqrt{4+y}$. Das Minuszeichen scheidet aus, weil $x \in [0, \ 4]$ sein muss.
(Es sei bemerkt, dass für die Funktion f_a bei $a < 1$ zwar auch eine Umkehrabbildung, jedoch keine Umkehrfunktion mehr existiert.

2. 7.
f ist eine Parabel. Sie nimmt ihren kleinsten Funktionswert für $x = x_s$, wobei x_s die x – Koordinate des Scheitelpunktes der Parabel ist. Für x_s ergibt sich wegen

$$y = x^2 - 2x - 1 = (x-1)^2 - 1 - 1$$

$x_s = 1$. Somit folgt also

$$f(x) \geq f(1) = 1 - 2 - 1 = -2, \quad \forall x \in \left]-\infty, \ +\infty\right[\ .$$

Daher ist $C_1 = -3$ erst recht eine untere Schranke.
Weiter sollen die Zahlen a, b so bestimmt werden, dass

$$x^2 - 2x - 1 \leq 7$$

oder

$$x^2 - 2x - 8 \leq 0, \qquad \forall x \in [a, b]$$

gilt. Nun ist aber $h(x) := x^2 - 2x - 8 \leq 0, \ \forall x \in \left]-\infty, +\infty\right[$ selbst eine Parabel, die negative Werte nur zwischen ihren Nullstellen annimmt (vorausgesetzt diese Nullstellen sind reelle Zahlen). Die Lösung der Gleichung

$$x^2 - 2x - 8 = 0$$

ergibt $x_1 = -2$, $x_2 = 4$. Damit hat man $h(x) \leq 0$, $\forall x \in [-2, 4]$ oder $f(x) \leq 7$, $\forall x \in [a, b]$ mit $a = -2$, $b = 4$.

2. 8.
Es seien $x_1, x_2 \in R^1$, beliebig mit $x_1 < x_2$. Dann gilt

$$2x_2 = 2x_1 + a, \quad a > 0 .$$

Somit folgt

$$e^{2x_2 + a} = e^{2x_1 + a} = e^a \cdot e^{2x_1} > e^{2x_1} \qquad (\because \ e^a > 1 \text{ für } a > 0)$$

Nach Multiplikation mit –1 und anschließender Addition der Zahl 1 ergibt sich die geforderte Ungleichung

$$1 - e^{2x_2} < 1 - e^{2x_1} .$$

2. 9.

Es muss für beliebige $x_1, x_2 \in R^1$ die Ungleichung

$$-\left(\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2\right)^2 \geq -\frac{1}{2}x_2^2 + \frac{1}{2}x_2^2$$

gezeigt werden:

Diese Forderung ist äquivalent mit

$$\frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 - \left(\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2\right)^2 \geq 0 .$$

Diese ist aber wegen

$$\frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 - \left(\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2\right)^2 = \frac{1}{4}(x_1 - x_2)^2 \geq 0$$

offensichtlich.

(Letzte Aktualisierung: 23.02.05)