Kapitel I
Zahlenfolgen und -reihen

D. 1. 1. **(*Zahlenfolgen*)**
Ist jeder Zahl $n \in N$ genau eine Zahl $a_n \in R^1$ zugeordnet, so sagt man, dass die Zahlen

$$a_1,\ a_2,...,\ a_n,...$$

eine (reelle) *Zahlenfolge* bilden. Man schrieb:

$$\{a_n\}_{n \in N}\ .$$

Die a_n heißen *Glieder* der Zahlenfolge.

B. 1. 1.
1. Eine Zahlenfolge ist also im Sinne der Definition D. 1. 1. eine Funktion, deren Definitionsbereich im Allgemeinen die Menge der natürlichen Zahlen ist.

2. Gelegentlich wird als Definitionsbereich einer Folge die Menge der ganzen Zahlen gewählt. Dies widerspricht aber nicht dem Sinn unserer Definition.

B. 1. 2.
Eine Zahlenfolge lässt sich manchmal *formelmäßig* darstellen. Dabei kann das Bildungsgesetz *explizit* oder *rekursiv* sein.

BS. 1. 1.
Durch die Zahlenfolge

1, 2, 3, 4, ...

lässt sich die Menge der natürlichen Zahlen beschreiben.
Zur Beschreibung derselben Menge kann auch hier das explizite Bildungsgesetz

$$\{a_n\}_{n \in N} \quad \text{mit} \quad a_n = n$$

herangezogen werden.
Ebenfalls kann man die rekursive Form

$$a_0 := 1, \quad a_n := a_{n-1} + 1, \quad n \in N$$

wählen.

D. 1. 2. **(*Teilfolge*)**
Sei $\{a_n\}_{n \in N}$ und $k_1, k_2,...$ eine Folge von natürlichen Zahlen mit $k_1 < k_2 < ...$
Dann hießt

$$\{a_n\}_{k_n \in N}$$

eine *Teilfolge* der Folge $\{a_n\}_{n\in N}$.

<u>BS. 1. 2.</u>
Die Folgen

$$\left\{\frac{1}{n^2}\right\} = 1,\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{9},\ \frac{1}{16},\dots,\ \frac{1}{n^2},\dots$$

$$\left\{\frac{1}{3n}\right\} = \frac{1}{3},\ \frac{1}{6},\ \frac{1}{9},\ \frac{1}{12},\dots,\ \frac{1}{3n},\dots$$

$$\left\{\frac{1}{4n-1}\right\} = \frac{1}{3},\ \frac{1}{7},\ \frac{1}{11},\ \frac{1}{15},\dots,\ \frac{1}{4n-1},\dots$$

sind Teilfolgen der Zahlenfolge

$$\left\{\frac{1}{n}\right\} = 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{5},\ \frac{1}{6},\ \frac{1}{7},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{9}\dots,\ \frac{1}{n},\dots$$

<u>D. 1. 3.</u> (*Monotonie*)
Eine Zahlenfolge $\{a_n\}_{k_n\in N}$ heißt

1. *monoton wachsend*, wenn

$$a_n \le a_{n+1} \qquad \forall n \in N\ ,$$

2. *streng monoton wachsend*, wenn

$$a_n < a_{n+1} \qquad \forall n \in N\ ,$$

3. *monoton fallend*, wenn

$$a_n \ge a_{n+1} \qquad \forall n \in N\ ,$$

4. *streng monoton fallend*, wenn

$$a_n > a_{n+1} \qquad \forall n \in N\ .$$

<u>BS. 1. 3.</u>
Zeigen Sie, dass die Folge

$$\{a_n\}_{n\in N} \qquad \text{mit} \qquad a_n = \frac{1}{n^2}$$

streng monoton fallend ist.

Lösung:

$$a_n = \frac{1}{n^2}, \qquad a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^2}$$

$$a_n = \frac{1}{n^2} \overset{?}{>} \frac{1}{(n+1)^2} = a_{n+1}$$

$$\frac{(n+1)^2}{n^2} \overset{?}{>} 1$$

$$(n+1)^2 \overset{?}{>} n^2$$

$$n^2 + 2n + 1 \overset{?}{>} n^2$$

$$2n + 1 > 0$$

<u>BS. 1. 4.</u>
Zeigen Sie, dass die Folge

$$\{a_n\}_{n\in N} \quad \text{mit} \quad a_n = 2n + (-1)^n$$

monoton wachsend ist.

Lösung:

$$a_{n+1} = 2\cdot(n+1) + (-1)^{n+1}$$

$$a_n = 2n + (-1)^n$$

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= 2\cdot(n+1) + (-1)^{n+1} - 2n - (-1)^n \\ &= 2 + (-1)^{n+1} - (-1)^n \\ &= 2 + (-1)^n \cdot \left[(-1)^1 - 1\right] \\ &= 2 + (-1)^n \cdot (-2) \\ &= 2(1 - (-1)^n) \\ &\geq 0 \quad . \end{aligned}$$

<u>D. 1. 4.</u> (*Beschränktheit*)
Die Zahlenfolge $\{a_n\}_{n\in N}$ heißt

1. *nach unten beschränkt*, wenn

$$\exists k \in R^1: \quad a_n \geq k, \quad \forall n \in N \ .$$

2. *nach oben beschränkt*, wenn

$$\exists K \in R^1: \quad a_n \leq K, \quad \forall n \in N.$$

3. *beschränkt*, wenn sie sowohl nach unten als auch nach oben beschränkt ist. bzw.

$$\exists K_{\max} \in R^1: \quad |a_n| \leq K_{\max}, \quad \forall n \in N$$

mit

$$K_{\max} = \max\{|k|, |K|\}$$

<u>BS. 1. 5.</u>
Zeigen Sie, dass die Folge

$$\{a_n\}_{n \in N} \quad \text{mit} \quad a_n = n^3$$

nach unten beschränkt ist.

Lösung:

$$a_n \geq 1 = k, \quad \forall n \in N.$$

<u>BS. 1. 6.</u>
Zeigen Sie, dass die Folge

$$\{a_n\}_{n \in N} \quad \text{mit} \quad a_n = \frac{1}{n}$$

beschränkt ist.

Lösung:

$$k = 0 < \frac{1}{n} \leq 1 = K, \quad \forall n \in N.$$

<u>D. 1. 5.</u> (*Infimum, Supremum*)
Gegeben sei die Zahlenfolge $\{a_n\}_{n \in N}$

1. Die Folge hat das *Infimum* g, wenn

(1) $a_n \geq g, \quad \forall n \in N$

(2) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, a_{N \in \boldsymbol{N}} \;: a_N < g + \varepsilon$

2. Die Folge hat das *Supremum* G, wenn

(1) $a_n \leq G, \quad \forall n \in N$

(2) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, a_{N \in N} \; : a_N > G - \varepsilon$

Man schreibt

$$g = \inf \{a_n\}_{n \in \mathrm{N}}$$

bzw.

$$G = \sup \{a_n\}_{n \in \mathrm{N}}$$

BS. 1. 7.
Zeigen Sie, dass die Folge

$$\{a_n\}_{n \in N}\,, \qquad a_n = 1 - \frac{1}{n}$$

das Supremum $G = 1$ hat.

Lösung:

(1) Es gilt

$$a_n = 1 - \frac{1}{n} \leq 1\,.$$

(2)

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, a_{N \in N} \; : a_N > 1 - \varepsilon\,,$$

d. h.

$$1 - \frac{1}{N} > 1 - \varepsilon\,,$$

$$N > \frac{1}{\varepsilon}\,.$$

Z. B. für $\varepsilon = \frac{3}{10}$ gilt $N > \frac{10}{3}$, d. h. $N = 4$.

D. 1. 6. (*Grenzwert*)
Die Folge $\{a_n\}_{n \in N}$ *konvergiert* gegen (die endliche Zahl) a, wenn für alle $\varepsilon > 0$ ein $N(\varepsilon) \in \mathrm{N}$ existiert, so dass für alle $n > N$ gilt:

$$|a_n - a| < \varepsilon .$$

a heißt *Grenzwert* der Zahlenfolge $\{a_n\}_{n\in N}$.

an schreibt:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a .$$

Existiert eine solche Zahl nicht, liegt eine *divergente* Folge vor.
Gilt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 ,$$

do heißt die Folge eine *Nullfolge*.

BS. 1. 7.
Untersuchen Sie die Folge

$$\{a_n\}_{n\in N} \quad \text{mit} \quad a_n = \frac{n}{n+1}$$

auf Konvergenz.

Lösung:
Es gilt:

$$a_n = \frac{n}{n+1} = \frac{n+1-1}{n+1} = \frac{n+1}{n+1} - \frac{1}{n+1}$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1} .$$

$$a_1 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$a_2 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$a_3 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

.
.
.

$$a_{99} = 1 - \frac{1}{100} = 0.99$$

$$a_{999} = 1 - \frac{1}{1000} = 0.999$$

.
.
.

Wir vermuten also

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1,$$

denn es gilt:

$$|a_n - 1| = \left|\frac{n}{n+1} - 1\right| = \left|-\frac{1}{n+1}\right| = \frac{1}{n+1},$$

$$\frac{1}{n+1} < \varepsilon,$$

$$n > \frac{1}{\varepsilon} - 1.$$

Wählen wir also

$$N := \frac{1}{\varepsilon} - 1,$$

dann gilt für jedes $n > N$:

$$|a_n - 1| = \left|\frac{n}{n+1} - 1\right| < \varepsilon.$$

Sei z. B. $\varepsilon = 0.1$, dann ist

$$N = \frac{1}{0.1} - 1 = 0.9,$$

d. h. für alle $n > 9$ gilt

$$|a_n - 1| < 0.1.$$

S. 1. 1.
Jede konvergente Folge ist beschränkt.

Beweis:
Sei $\{a_n\}_{n\in N}$ eine konvergente Folge mit dem Grenzwert a. Dann existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n > N$

$$a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$$

gilt.
Sei

$$k := \min\left(a_1, a_2, ,..., a_N, a-\varepsilon\right)$$
$$K := \max\left(a_1, a_2, ,..., a_N, a+\varepsilon\right).$$

Damit gilt

$$k \le a_n \le K, \quad \forall n ,$$

d. h. die Folge $\{a_n\}_{n\in N}$ ist beschränkt.

<u>S. 1. 2</u>
Sei $\{a_n\}_{n\in N}$ eine konvergente Folge mit dem Grenzwert a. Dann hat jede Teilfolge dieser Folge ebenfalls den Grenzwert a.

Beweis:
Laut Voraussetzung existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N(\varepsilon)$, so dass für alle $n > N$ gilt

$$|a_n - a| < \varepsilon .$$

Diese Ungleichung gilt jedoch auch für alle Glieder der Folge $\{a_{k_n}\}_{k_n\in N}$ mit $k_n > N$.

<u>BS. 1. 8.</u>
Die Folge

$$\{a_n\}_{n\in N} , \quad a_n = \frac{1}{n},$$

hat den Grenzwert 0, denn es gilt

$$|a_n - 1| = \left|\frac{1}{n}\right| < \varepsilon ,$$

$$\frac{1}{n} < \varepsilon, \quad n > \frac{1}{\varepsilon} =: N .$$

Dann haben auch ihre Teilfolgen

$$\{a_n\}_{n\in N} , \quad a_n = \frac{1}{n^2},$$
$$\{a_n\}_{n\in N} , \quad a_n = \frac{1}{3n},$$
$$\{a_n\}_{n\in N} , \quad a_n = \frac{1}{4n-1}$$

ebenfalls den Grenzwert 0.

<u>S. 1. 3.</u>
Eine Folge hat höchstens einen Grenzwert.

Beweis:
Für die Folge $\{a_n\}_{n\in N}$ möge gelten

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a, \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = a^*, \quad a \neq a^* .$$

Dann gilt

$$\left|a-a^*\right| = \left|(a_n-a^*)-(a_n-a)\right|$$

$$\leq \left|(a_n-a^*)+(a_n-a)\right| .$$

Wegen der Konvergenz der Folge kann für jede noch so kleine Zahl $\varepsilon > 0$ ein $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ gefunden werden, so dass für alle $n > N$ gilt

$$\left|a-a^*\right| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon .$$

Wegen $a \neq a^*$ ist $\left|a-a^*\right| > 0$. Wählt man nun

$$\varepsilon < \frac{\left|a-a^*\right|}{2},$$

so kann die obige Ungleichung nicht gelten. Daher gilt

$$\left|a-a^*\right| = 0,$$

d. h. $a = a^*$.

<u>S. 1. 4.</u>
Gegeben seien die Folgen $\{a_n\}_{n\in N}$ und $\{b_n\}_{n\in N}$ mit

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = a .$$

Dann hat auch die Folge

$$a_1,\ b_1,\ a_2,\ b_2, \ldots$$

den Grenzwert a.

<u>S. 1. 5.</u>
Ist $\{a_n\}_{n\in N}$ eine Nullfolge und $\{b_n\}_{n\in N}$ beschränkt. Dann ist die Folge

$$\{a_n \cdot b_n\}_{n\in N}$$

eine Nullfolge.

BS. 1. 9.
Sei

$$\{a_n\}_{n\in N}\ , \qquad a_n = \frac{1}{n},$$
$$\{b_n\}_{n\in N}\ , \qquad \mathrm{b}_n = (-1)^n .$$

Die Folge $\{a_n\}_{n\in N}$ ist eine Nullfolge. Die Folge $\{b_n\}_{n\in N}$ ist beschränkt. Es gilt z. B.

$$-1 \le b_n \le 1 .$$

Damit ist die Folge

$$\{a_n \cdot b_n\}_{n\in N}\ , \qquad a_n \cdot b_n = (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$$

eine Nullfolge.

S. 1. 6.
Gegeben seien die Folgen $\{a_n\}_{n\in N}$, $\{b_n\}_{n\in N}$. Es gelte

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a, \qquad \lim_{n\to\infty} b_n = b .$$

Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n = a + b .$$

Beweis:
Sei $\varepsilon > 0$ beliebig klein. Es muss gezeigt werden:

$$\exists N : \quad a + b - \in < a_n + b_n < a + b + \varepsilon, \quad n = N, N+1, \ldots$$

Laut Voraussetzung gibt es nun zu jedem $\frac{\varepsilon}{2}$ eine Zahl n_1 bzw. n_2 mit

$$a - \frac{\varepsilon}{2} < a_n < a + \frac{\varepsilon}{2}, \quad n = n_1,\ n_1 + 1, \ldots$$
$$b - \frac{\varepsilon}{2} < b_n < b + \frac{\varepsilon}{2}, \quad n = n_2,\ n_2 + 1, \ldots$$

Sei

$$N := \max(n_1, n_2).$$

Die Addition von den letzten beiden Ungleichungen, die auch für alle $n > N$ gelten, liefert die Behauptung.

S. 1. 7.
Gegeben seien die Folgen $\{a_n\}_{n\in N}$, $\{b_n\}_{n\in N}$. Es gelte

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a, \qquad \lim_{n\to\infty} b_n = b\,.$$

Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n = a\cdot b\,.$$

S. 1. 8.
Gegeben sei die Folge $\{a_n\}_{n\in N}$, $a_n \neq 0$ für alle n . Es gelte

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \ \ (\neq 0)\,.$$

Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} a_n} = \frac{1}{a}\,.$$

S. 1. 9.
Gegeben seien die Folgen $\{a_n\}_{n\in N}$, $\{b_n\}_{n\in N}$, $b_n \neq 0$ für alle n . Es gelte

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a, \qquad \lim_{n\to\infty} b_n = b \ (\neq 0)\,.$$

Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \frac{a}{b}\,.$$

Beweis:
Der Beweis folgt unmittelbar aus den Sätzen S. 1. 8. und S. 1. 9.

B. 1. 4.
Folgende Beziehungen lassen sich beweisen:

(1. 6.) $$\lim_{n\to\infty} c\cdot a_n = c\cdot \lim_{n\to\infty} a_n = c\cdot a, \quad a := \lim_{n\to\infty} a_n, \quad c:\ \text{eine beliebige Zahl},$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = a - b,$$

falls die Grenzwerte $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ existieren.

B. 1. 5.
Eine Kombination der Beziehungen (1. 1.) und (1. 7.) ergibt:

(1. 7.) $$\lim_{n\to\infty}(c_1\cdot a_n+c_2 b_n)=c_1\cdot\lim_{n\to\infty}a_n+c_2\lim_{n\to\infty}b_n\,.$$

Die Eigenschaft (1. 6.) bezeichnet man als *Homogenität* des Grenzwertes von Zahlenfolgen.

Als Spezialfälle von (1. 7.) erhält man für $c_1=1$ und $c_2=\pm 1$:

(1. 8.) $$\lim_{n\to\infty}(a_n\pm b_n)=\lim_{n\to\infty}a_n\pm\lim_{n\to\infty}b_n\,.$$

(1. 8.) drückt aus, dass Grenzwertbildung für Zahlenfolgen sowie Addition bzw. Subtraktion vertauschbar sind, und wird als *Additivität* für Zahlenfolgen bezeichnet.

Homogenität und Additivität des Grenzwertes für Zahlenfolgen werden unter dem Sammelbegriff *Linearität* des Grenzwertes zusammengefasst und zwar in (1. 7.).

BS. 1. 11.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n-3}{n+7}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1-\frac{3}{n}}{1+\frac{7}{n}}\right)$$

$$=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{3}{n}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{7}{n}\right)}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}1-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{n}}{\lim\limits_{n\to\infty}1+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{7}{n}}$$

$$=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}1-3\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}}{\lim\limits_{n\to\infty}1+7\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}}=\frac{1-0}{1+0}=1\,.$$

BS. 1. 12.
Wir berechnen

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n\cdot(n+1)}-n\right).$$

Wegen

$$\sqrt{n\cdot(n+1)}-n=\left(\sqrt{n\cdot(n+1)}-n\right)\cdot\frac{\sqrt{n\cdot(n+1)}+n}{\sqrt{n\cdot(n+1)}+n}$$

$$=\frac{n\cdot(n+1)-n^2}{\sqrt{n\cdot(n+1)}+n}=\frac{n}{n\cdot\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)}=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}$$

hat man

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n\cdot(n+1)}-n\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}=\frac{1}{2}.$$

S. 1. 10.
Gegeben seien die Folgen

$$\{a_n\}_{n\in N}\ ,\quad \{b_n\}_{n\in N}\ ,\quad \{c_n\}_{n\in N}\ .$$

Es gelte

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = a,$$

$$a_n \le c_n \le b_n .$$

Dann ist $\{c_n\}_{n\in N}$ konvergent, und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} c_n = a .$$

Beweis:
Es gilt

(1. 8.) $$a_n - a \le c_n - a \le b_n - a$$

Da die Folge $\{a_n\}_{n\in N}$ den Grenzwert a besitzt, gilt

(1. 9.) $$\forall \varepsilon > 0\ \exists \text{ ein } N_1 : \quad -\varepsilon < a_n - a < +\varepsilon, \quad \forall n > N_1 .$$

Es gilt analog für $\{b_n\}_{n\in N}$

(1. 10.) $$\forall \varepsilon > 0\ \exists \text{ ein } N_2 : \quad -\varepsilon < b_n - a < +\varepsilon, \quad \forall n > N_2 .$$

Sei

$$N := \max\{N_1;\ N_2\}.$$

Dann gilt wegen (1. 8.) – (1. 10.)

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \text{ ein } N : \quad -\varepsilon < a_n - a \le c_n - a \le b_n - a < +\varepsilon$$

D. 1. 7. ***(Uneigentlicher Grenzwert)***
(a) Die Folge $\{a_n\}_{n\in N}$ hat den *uneigentlichen Grenzwert* $+\infty$, wenn

$$\forall A>0 \quad \exists \text{ ein } N\in \mathbb{N} \ : \ a_n > A, \quad \forall n>N .$$

Man schreibt:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty .$$

(b) Die Folge $\{a_n\}_{n\in N}$ hat den *uneigentlichen Grenzwert* $-\infty$, wenn

$$\forall A<0 \quad \exists \text{ ein } N\in \mathbb{N} \ : \ a_n < A, \quad \forall n>N .$$

Man schreibt:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty .$$

In beiden Fällen sagt man auch, dass die Folge *bestimmt divergent ist mit dem (uneigentlichen) Grenzwert* $-\infty$ bzw. $+\infty$.

BS. 1. 13.
Sei

$$\{n^2\}_{n\in N} = 1^2,\ 2^2,\ 3^2,\ ...,n^2,...$$

Die Folge ist bestimmt divergent, und es gilt $\{a_n\}_{n\in N} = +\infty$, denn

$$\forall A>0 \quad \exists \text{ ein } N\in \mathbb{N} \ : \ n^2 > A, \quad n>\sqrt{A}=N \quad .$$

BS. 1. 14.
Die Folge

$$\{a_n\}_{n\in N}\ , \quad a_n = -2n+1$$

ist bestimmt divergent mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$, denn mit $A<0$ gilt

$$-2n+1<A, \quad n>\frac{1}{2}(1-A)=N .$$

Z. B. ist für $A=-1000$

$$N=\frac{1}{2}(1+1000) .$$

(Letzte Aktualisierung: 10.01.06)