Kapitel I
Zahlenfolgen- und Reihen

(Lösungen)

1. 1.
a)

$$a_1 = \frac{1}{2}, \quad a_2 = \frac{1}{4}, \quad a_3 = \frac{1}{8}, \quad a_4 = \frac{1}{16}, \quad a_5 = \frac{1}{32}.$$

b)

$$a_1 = 2, \quad a_2 = 6, \quad a_3 = 14, \quad a_4 = 26, \quad a_5 = 42.$$

1. 2.
1.

$$a_n = \frac{1}{n} \cdot (-1)^n.$$

2.

$$a_n = n \cdot \left[1 + (-1)^n\right].$$

1. 3.

1. $\left\{\frac{1}{2n}\right\}_{n \in N}$,

2. $\left\{\frac{3}{2n-1}\right\}_{n \in N}$,

3. $\left\{\frac{1}{4^n}\right\}_{n \in N}$,

4. $\left\{\frac{3}{6n-5}\right\}_{n \in N}$.

1. 4.
1.
Die Folge ist streng monoton fallend, da

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n^2} = -\frac{2n+1}{n^2 \cdot (n+1)} < 0.$$

2.
Die Folge ist monoton wachsend, da

$$a_{n+1} - a_n = 2 \cdot (n+1) + (-1)^{n+1} - \left[2n + (-1)^n\right] = 2\left[1 - (-1)^n\right] \geq 0.$$

3.
Nicht monoton.

1. 5.
1.

$$Inf\left\{1+\frac{1}{n}\right\}_{n\in N}=1, \qquad Sup\left\{1+\frac{1}{n}\right\}_{n\in N}=2;$$

2.

$$Inf\left\{\frac{5}{1-2n}\right\}_{n\in N}=-5, \qquad Sup\left\{\frac{5}{1-2n}\right\}_{n\in N}=0.$$

1. 6.
Sei $\varepsilon>0$
a)
Die Ungleichung

$$\left|\frac{2n-1}{n+3}-2\right|=\left|\frac{-7}{n+3}\right|=\frac{7}{n+3}<\varepsilon$$

ist erfüllt für alle $n>\frac{7}{\varepsilon}-3$.
b)
Die Ungleichung

$$\left|\frac{3n-1}{2n+1}-\frac{3}{2}\right|=\left|\frac{-5}{2\cdot(2n+1)}\right|=\frac{5}{2\cdot(2n+1)}<\varepsilon$$

ist erfüllt für alle $n>\frac{5}{4\varepsilon}-\frac{1}{2}$.

1. 7.
a)

$N=697$.

b)

$N=1250$.

1. 8.
a)
Es handelt sich um eine Nullfolge.

b)
Die Folge hat keinen Grenzwert:
Die Teilfolge $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}, n:\text{ungerade}$ hat den Grenzwert 1 und die Teilfolge $\left\{\frac{2n-1}{n}\right\}, n:\text{gerade}$ hat den Grenzwert 2.

1. 9.

a)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n-1}{2n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{3-\frac{1}{n}}{2+\frac{1}{n}}=\frac{3}{2}.$$

b)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{n^2+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{3}{n^2}}=0.$$

c)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+\sqrt{n^3+2}}{n^2-n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{3+\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{2}{n^4}}}{1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n_2}}=3.$$

1. 10.

a)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n+1}{3-n}=\lim_{n\to\infty}\left(-n-4+\frac{13}{3-n}\right)=-\infty.$$

b)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n+1}}=+\infty.$$

1. 11.

Die Folge ist nach oben beschränkt:

$$a_1=\sqrt{2}<2,\quad a_n<2\Rightarrow a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}<\sqrt{2+2}=2.$$

Die Folge ist streng monoton wachsend:

$$a_n<2,\ aa_{n+1}=\sqrt{2+a_n}>\sqrt{a_n\cdot a_n}=a_n.$$

Damit ist die Folge konvergent. Es gilt

$$\lim_{n\to\infty}(a_n+1)=\lim_{n\to\infty}a_n=a,$$

$$a=\sqrt{2+a}\,,\qquad a^{'}=2,\qquad a^{''}=-1.$$

Die Lösung $a^{''}=-1$ kommt wegen $a_n>0$ nicht in Frage. Die Folge hat also den Grenzwert 2.

1. 12.
Die Teilfolge $\{2n\}, n:\text{ungerade}$ hat den uneigentlichen Grenzwert ∞ und die Teilfolge $\{0\}, n:\text{ gerade}$ hat den Grenzwert 0. Damit hat die Folge weder einen eigentlichen noch einen uneigentlichen Grenzwert.

1. 13.

$$a_n = \frac{1}{(3n-2)\cdot(3n+1)} = \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{3n-2} - \frac{1}{3n+1}\right),$$

$$s_1 = a_1 = \frac{1}{3}\cdot\left(1 - \frac{1}{4}\right),$$

$$s_2 = a_1 + a_2 = \frac{1}{3}\cdot\left(1 - \frac{1}{7}\right),$$

...

$$s_n = \frac{1}{3}\cdot\left(1 - \frac{1}{3n+1}\right),$$

$$s = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\cdot\left(1 - \frac{1}{3n+1}\right) = \frac{1}{3}.$$

1. 14.
a)
Die Reihe divergiert, denn

$$a_n = \frac{\ln n}{n} > \frac{1}{n} = b_n$$

und die harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ divergiert.

b)
Die Reihe ist konvergent, denn

$$\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{n}\right)^n < \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

und die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n$ konvergiert.

1. 15.
a)

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{(\ln n)^n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n} = 0 < 1\,.$$

b)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e} < 1\,.$$

1. 16.
Die Reihe divergiert, da die notwendige Bedingung für die Konvergenz nicht erfüllt ist:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1+n}{2n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2n}+\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \neq 0\,.$$

1. 17.
a)

$$a_{26} = 24000\cdot 1.12^{25} = 408001.55\,€$$

b)

$$1000000 = 24000\cdot 1.12^{n-1}\,,\qquad n \approx 34\,,$$

d. h. etwa im Jahre 2038.

(Letzte Aktualisierung: 24.02.05)