Kapitel XI

Funktionen mit mehreren Variablen

<u>D. 11. 1</u> (*Funktionen von n unabhängigen Variablen*)
Sei $n \in R^1$ und $D(f) \subseteq R^1$. Ist jedem Vektor (Punkt) $(x_1, x_2, ..., x_n)^T \in D(f)$ durch eine Vorschrift f eine reelle Zahl $z = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ zugeordnet, so heißt f *eine Funktion von n unabhängigen Variablen* $x_1, x_2, ..., x_n$ auf dem Definitionsbereich $D(f)$. Dabei heißt z *die abhängige Variable*.
Man schreibt

$$f: \quad D(f) \to R^1, \quad D(f) \subseteq R^1$$

oder

$$z = f(x) = f(x_1, x_2, ..., x_n), (x_1, x_2, ..., x_n)^T \in D(f), \quad D(f) \subseteq R^n, \quad z \in R^1.$$

<u>B. 11. 1.</u>
Die graphische Darstellung einer Funktion mehrerer Variablen ist nur im Fall $n = 2$ möglich. Bei $n > 2$ sind alle Untersuchungen auf die analytische Darstellung $z = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ oder auf eine tabellarische Erfassung angewiesen.

<u>D. 11. 2.</u> (*Graph einer Funktion*)
Bei einer Funktion

$$f: \quad D(f) \to R^1, \quad D(f) \in R^2$$

zweier Variablen x und y heißt die Punktmenge

$$\{(x, y, z) \in R^1 \mid z = f(x, y), \ (x, y) \in D(f)\}$$

der *Graph* von f.

<u>B. 11. 2.</u>
Eine weitere Möglichkeit, eine Funktion $f(x, y)$ zweier Variablen graphisch zu veranschaulichen, ist die Darstellung mittels *Isohöhenlinien*.

<u>D. 11. 2</u> (*Isohöhenlinien*)
Ist $f: D(f) \to R^1, \quad D(f) \subseteq R^2$, eine Funktion zweier Variablen, so heißen die Punktmengen

$$M_c := \{(x, y)^T \in D(f) \mid f(x, y) = c\} \in R^2$$

Isohöhenlinien von f (mit der Höhe $c \in R^1$).

<u>D. 11. 3.</u> (*Stetigkeit*)
Eine Funktion $f:\ D(f) \to R^1,\ D(f) \subseteq R^n$, heißt *an der Stelle* $x_0 \in D(f)$ *stetig*, falls zu jeder Umgebung $U_\varepsilon\left(f\left(x_0\right)\right) \subset R^1$ eine Umgebung $U_\delta\left(x^0\right) \subseteq D(f)$ existiert, so dass gilt:

$$\left\{z \in R^1 \mid z = f(x),\ x \in U_\delta(x^0)\right\} \subseteq U_\varepsilon(f(x^0))$$

<u>D. 11. 4</u> (*Grenzwert*)
Eine Funktion $f:\ D(f) \to R^1,\ D(f) \subseteq R^n$, hat an einer Stelle $x = \left(x_1, x_2, ..., x_n\right)^T \in D(f)$ den *Grenzwert* $a \in \square^1$, wenn gilt

$$\lim_{\substack{y_1 \to x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n \to x_n}} f(y_1, ..., y_n) = a\ ,$$

wobei $\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)^T \in U_\varepsilon(x) \subseteq D(f)$ für ein geeignetes $\varepsilon > 0$ erfüllt sein muss.

<u>B. 11. 3.</u>
Der Grenzwert einer Funktion mehrerer Variablen kann bezüglich einer oder mehrerer Variablen gebildet werden. Will man bei der Grenzwertbildung z. B. nur die $i-$te Komponente $i \in \{1, 2, ..., n\}$ betrachten, so schreibt man

$$\lim_{y_i \to x_i} f(x_1, ..., x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, ..., x_n)\ .$$

Mann nennt dies den Grenzwert von f bezüglich x_i.

<u>S. 11. 1.</u>
Eine Funktion $f:\ D(f) \to R^1,\ D(f) \subseteq R^n$, ist an einer Stelle $x \in D(f)$ genau dann stetig, wenn f an der Stelle x einen Grenzwert $a \in R^1$ hat und darüber hinaus gilt:

$$a = \lim_{\substack{y_1 \to x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n \to x_n}} f(y_1, ..., y_n) = f(x_1, ..., x_n)$$

<u>D. 11. 5</u> (*Partielle Ableitung*)
Sei $f:\ D(f) \to R^1,\ D(f) \subseteq R^n$. Existiert für ein $i \in \{1,\ 2, ...,\ n\}$ an einer festen Stelle $x = \left(x_1, x_2, ..., x_n\right)^T \in \operatorname{int} D(f)$ der Grenzwert

$$\lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{f(x_1, ..., x_i + \Delta x_i, ..., x_n) - f(x_1, ..., x_n)}{\Delta x_i}\ ,$$

so wird dieser Grenzwert *die partielle Ableitung von* f *an der Stelle* $(x_1, x_2, ..., x_n)^T$ genannt und mit

$$f_{x_i}(x_1, ..., x_n) = \left[\frac{\partial f}{\partial x_i}\right]_{(x_1,...,x_n)^T}$$

bezeichnet. Man sagt, dass die Funktion f dann an der Stelle $(x_1, x_2, ..., x_n)^T$ *partiell differenzierbar nach* x_i ist.
Ist f nach jeder Stelle einer offenen Punktmenge $D \subseteq D(f)$ partiell nach x_i differenzierbar ist, so heißt f *partiell nach* x_i *differenzierbar über* D.

B. 11. 4.
Existiert der Grenzwert in D. 11. 5. an allen Stellen $x \in D(f)$, so ist f_{x_i} wieder eine Funktion von n unabhängigen Variablen auf $D(f)$. Sie wird *die partielle Ableitung von* f *nach* x_i genannt.

D. 11. 6. (*Differenzierbarkeit*)
Existieren für eine Funktion $f:\ D(f) \to R^1,\ D(f) \subseteq R^n$ alle partiellen Ableitungen $f_{x_i},\ i = 1, 2, ..., n$ auf einem Bereich $D \subseteq D(f)$ als stetige Funktionen, so heißt f auf D (*stetig*) *differenzierbar*. Im Falle $D = D(f)$ spricht man von *Differenzierbarkeit* der Funktion schlechthin.

S. 11. 2.
Die Funktionen $f:\ D(f) \to R^1,\ D(f) \subseteq R^n$ und $g:\ D(g) \to R^1,\ D(g) \subseteq R^n$ seien über $D \subseteq D(f) \cap D(g)$ partiell differenzierbar nach $x_i,\ i \in \{1,\ 2, ...,\ n\}$.

1. Die Funktion $h(x) = c \cdot f(x),\ c \in R^1$, ist über D partiell differenzierbar nach x_i, und es gilt:

$$h_{x_i}(x) = c \cdot f_{x_i}(x) \quad (\textit{Faktorregel}).$$

2. Die Funktion $h(x) = f(x) + g(x)$ ist über D partiell differenzierbar nach x_i, und es gilt:

$$h_{x_i}(x) = f_{x_i}(x) + g_{x_i}(x) \quad (\textit{Summenregel}).$$

3. Die Funktion $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ ist über D partiell differenzierbar nach x_i, und es gilt:

$$h_{x_i}(x) = f_{x_i}(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g_{x_i}(x) \quad (\textit{Produktregel}).$$

4. Die Funktion $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ ist über D partiell differenzierbar nach x_i,
   falls $g(x) \neq 0$ für alle $x \in D$ und es gilt:

$$h_{x_i}(x) = f_{x_i}(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g_{x_i}(x) \quad (\textit{Produktregel}).$$

$$h_{x_i}(x) = \frac{f_{x_i}(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g_{x_i}(x)}{[g(x)]^2} \quad (\textit{Quotientenregel}).$$

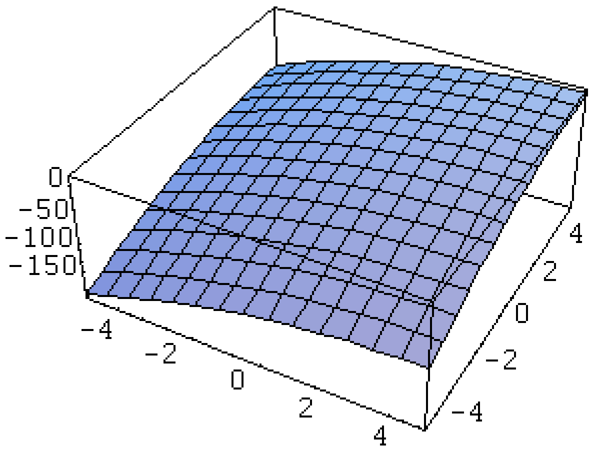
D. 11. 7. (***Gradient***)
Ist eine Funktion $f: D(f) \to R^1,\ D(f) \subseteq R^n$ an einer Stelle $x^0 \in D(f)$ partiell differenzierbar, so heißt der Vektor

$$\nabla f\left(x^0\right) = gradf\left(x^0\right) = \left(f_{x_1}, \ldots, f_{x_n}\right)^T$$

der *Gradient* von f an der Stelle x^0.

BS. 11. 1.
Gegeben sei die Funktion

$$f(x_1, x_2) = -x_1^2 + 10x_1 - x_2^2 + 10x_2 - 40.$$



Wir bestimmen den Gradientenvektor dieser Funktion an der Stelle $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 4 & 4 \end{pmatrix}^T$:

$$\nabla f\left(x_1, x_2\right) = \left(-2x_1 + 10,\ -2x_2 + 10\right)$$
$$\nabla f\left(4,\ 4\right) = \left(2,\ 2\right).$$

B. 11. 5.
Der Gradient einer Funktion an einer Stelle x^0 weist „in Richtung des steilsten Anstiegs“ (des Graphen) der Funktion.

<u>D. 11. 8.</u> (*Partielles Differential*)
Sei $f: D(f) \to R^1,\ D(f) \subseteq R^n$, eine differenzierbare Funktion, $x^0 \in D(f)$ und $\Delta x_i \in R^1$.
Dann heißt die reelle Zahl

$$df_{x_i} := f_{x_i}(x^0) \cdot \Delta x_i$$

das *partielle Differential* von f bezüglich x_i an der Stelle $x^0,\ i \in \{1,\ 2, ..., n\}$.

<u>B. 11. 6.</u>
Das partielle Differential bezüglich x_i ist eine Näherung an den Zuwachs der Funktion, den man erhält, wenn man die Komponente x_i um Δx_i verändert.

<u>D. 11. 9.</u> (*Totales Differential*)
Sei $f: D(f) \to R^1,\ D(f) \subseteq R^n$, eine differenzierbare Funktion, $x^0 \in D(f)$
und $\Delta x_i \in R^1,\ i = 1,\ 2, ..., n$. Dann heißt die reelle Zahl

$$df := \sum_{i=1}^{n} f_{x_i}(x^0) \cdot \Delta x_i$$

das totale Differential von f an der Stelle x^0.

<u>B. 11. 7.</u>
Analog den partiellen Differentialen beschreibt das totale Differential an einer Stelle $x = (x_1,\ x_2, ..., x_n)^T$ die näherungsweise Änderung des Funktionswertes bei Veränderung der Komponenten x_i um $\Delta x_i,\ i = 1,\ 2, ..., n$.
Das totale Differential df hängt ähnlich wie die partiellen Differentiale von der Stelle x^0. und den Änderungen $\Delta x_i,\ i = 1,\ 2, ..., n$, ab.
Zur Bestimmung von Näherungswerten für einen Funktionswert einer Stelle $x = (x_1 + \Delta x_1,\ x_2 + \Delta x_2, ..., x_n + \Delta x_n)^T$ in der Nähe von $x = (x_1,\ x_2, ..., x_n)^T$ dient die *Näherungsformel*

$$f\left(x_1 + \Delta x_1,\ x_2 + \Delta x_2, ..., x_n + \Delta x_n\right) \approx f\left(x_1,\ x_2, ..., x_n\right) + df\ .$$

Je kleiner die Änderungen $\Delta x_i,\ i = 1,\ 2, ..., n$, sind, umso kleiner ist der absolute Fehler, den der Näherungswert gegenüber dem exakten Funktionswert hervorruft.

<u>BS. 11. 2.</u>
Gegeben sei die Funktion

$$f(x_1, x_2) = -x_1^2 + 10x_1 - x_2^2 + 10x_2 - 40, \quad D(f) = R_1\ .$$

Berechnen Sie die absoluten Fehler der Näherungswerte $f(4 + \Delta x_1,\ 3 + \Delta x_2)$ in der nachfolgenden Tabelle:

Änderungen		Exakter Wert	Näherungswert	Absoluter Fehler
Δx_1	Δx_2	$f\left(4+\Delta x_1, 3+\Delta x_2\right)$	$f\left(4,\ 3\right)+df$	
0.0	0.1	5.39	5.4	0.01
0.1	0.0	5.19	5.2	0.01
0.1	0.1	5.58	5.6	0.02
0.1	0.2	5.95	6.0	0.05
0.2	0.1	5.75	5.8	0.05
0.2	0.2	6.12	6.2	0.08
0.2	0.3	6.47	6.6	0.13
0.2	0.4	6.80	7.0	0.20
0.3	0.3	6.62	6.8	0.18
0.3	0.4	6.95	7.2	0.25
0.4	0.4	7.08	7.4	0.32
0.5	0.5	7.50	8.0	0.50
1.0	1.0	0.00	11.0	2.00
1.0	2.0	10.00	15.0	5.00

D. 11. 10 (*Partielle Ableitung 2. Ordnung*)
Sei $f:\ D(f)\to R^1,\ D(f)\subseteq R^n$, eine auf $D(f)$ differenzierbare Funktion der n unabhängigen Variablen $x_1,...,x_n$ und bezeichne $f_{x_i}(x_1,...,x_n)$ die Ableitungsfunktion von f nach x_i.
Existiert die partielle Ableitung der Ableitungsfunktion $f_{x_i}(x_1,...,x_n)$ nach der Variablen $x_j,\ j\in\{1,...,n\}$, an der Stelle $x=\left(x_1,...,x_n\right)^T$, so heißt sie *die partielle Ableitung 2. Ordnung von f nach x_i und x_j an der Stelle x*. Man schreibt:

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right|_{(x_1,...,x_n)^T} = f_{x_i x_j}\left(x_1,...,x_n\right).$$

Falls $f_{x_i x_j}$ auf dem ganzem Definitionsbereich existiert, so wird $f_{x_i x_j}$ *partielle Ableitung 2. Ordnung nach x_i und x_j von f genannt.*

B. 11. 8.
Eine zweimal partiell differenzierbare Funktion von n Variablen hat also n^2 partielle Ableitungen 2. Ordnung. Für genügend oft differenzierbare Funktionen können sukzessiv partielle Ableitungen beliebig hoher Ordnung definiert werden. Bei n Variablen hat man n^r partielle Ableitung r-ter Ordnung.

S. 11. 3.
Sind die partiellen Ableitungen 2. Ordnung einer Funktion $f:\ D(f)\to R^1,\ D(f)\subseteq R^n$, stetige Funktionen, so gilt

$$f_{x_i x_j} = f_{x_j x_i}$$

B. 11. 9.

1. Mann nennt $f_{x_i x_j}$ auch die *gemischten partiellen Ableitungen 2. Ordnung*, falls $i \neq j$.

   Im Falle $i = j$ schreibt man anstelle von $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i}$ meist $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$.
2. Die partiellen Ableitungen 2. Ordnung fasst man auch in der sog. *Hessesche Matrix* zusammen:

$$H\big|_x := \begin{pmatrix} f_{x_1^2} & . & . & . & f_{x_1 x_n} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ f_{x_n x_1} & . & . & . & f_{x_n^2} \end{pmatrix}.$$

D. 11. 11 (*Implizite und explizite Funktionen*)

Sei $f: D(f) \to R^2$ eine Funktion der Variablen x und y. Eine Funktion $y = g(x),\ x \in D(g) \subseteq R^1$, die in der Form

$$f(x, y) = f(x, g(x)) = 0$$

vorliegt, heißt *implizit*. Liegt g in der Form $y = g(x)$ vor, dann heißt g *explizit*.

B. 11. 10.

Jede explizit gegebene Funktion $y = g(x)$ kann als implizite Funktion $f(x, y) = y - g(x) = 0$ geschrieben werden. Dagegen kann eine nur explizit gegebene Funktion nicht auf eine explizite Form gebracht werden. Der Graph der Funktion g entspricht der Isohöhenlinie von f mit der Höhe $c = 0$.

S. 11. 4.

Sei $f: D(f) \to R^1,\ D(f) \subseteq R^2$ eine auf $D(f)$ differenzierbare Funktion. Sei die Funktion, durch die Gleichung $f(x, y) = 0$ implizit gegeben.

Dann gilt für alle Stellen $(x, y)^T \in D(f)$ mit $f_y(x, y) \neq 0$:

$$g'(x) = -\frac{f_x(x, y)}{f_y(x, y)}.$$

Ist $x = h(y)$ die zu $y = g(x)$ gehörende Umkehrfunktion, dann gilt für alle Stellen $(x, y)^T \in D(f)$ mit $f_x(x, y) \neq 0$:

$$h'(x) = -\frac{f_y(x, y)}{f_x(x, y)}.$$

BS. 11. 3.
Bestimmen Sie die Ableitung der Funktion $y = g(x)$ an der Stelle x_0, die wie folgt in impliziter Form angegeben sind:

1. $f(x, g(x)) = x^3y^3 - x - 2y + 2 = 0, \quad x_0 = 1$,
2. $f(x, g(x)) = 2x^2 + y - 1 = 0, \quad x_0 = 2$

Lösung:
1.
Für $x_0 = 1$ ergibt sich

$$f(x_0, g(x_0)) = y_0^3 - 2y_0 + 1 = 0 \text{ und } y_0 = 1.$$

Als erfüllt der Punkt $(x_0, y_0)^T = (1,\ 1)^T$ die Gleichung

$$f(x, y) = x^3y^3 - x - 2y + 2 = 0.$$

Damit gilt

$$g'(x) = -\frac{f_x(x_0, y_0)}{f_y(x_0, y_0)} = -\frac{3-1}{3-2} = -2$$

2.
Für $x_0 = 2$ ergibt sich $y_0 = -7$ als Lösung von

$$y_0 + 7 = 0.$$

Der Punkt $(x_0, y_0)^T = (2,\ \text{-}7)^T$ erfüllt die Gleichung

$$f(x, y) = 2x^2 + y - 1 = 0.$$

Es gilt

$$g'(x_0) = -\frac{4x_0}{1} = --8.$$

Die Funktion $y = g(x)$ ist auch in expliziter Form darstellbar:

$$y = g(x) = -2x^2 + 1.$$

Die Ableitung der expliziten Funktion bestätigt das obige Ergebnis.

BS. 11. 4
Gegeben sei die Funktion

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 5, \quad D(f) = R^2.$$

Schränken Sie den Definitionsbereich $D(f)$ so ein, dass durch $f(x,y)=0$ implizit eine Funktion $y=g(x)$ definiert wird und bestimmen Sie die Ableitung $g'(x_0)$ für $x_0=1$.

Lösung:
Die Isohöhenlinien M_c von f mit $c=-5$ sind Kreise um den Nullpunkt. Die Gleichung $f(x,y)=0$ beschreibt somit keine Funktion in impliziter Form:

$$y=\pm\sqrt{5-x^2}\ .$$

Beispielsweise sind dem Wert $x_0=1$ die Werte $y_{01}=2,\ y_{02}=-2$ zugeordnet. Wir machen also die Einschränkungen $y\geq 0$ und $x\in\left[-\sqrt{5},\ +\sqrt{5}\right]$.
Es ergibt sich der eingeschränkte Definitionsbereich

$$\left\{(x,y)^T\ |-\sqrt{5}\leq x\sqrt{5},\ y\geq 0\right\}.$$

Die Ableitung von $y=g(x)$ an der Stelle $x_0=1$ lautet:

$$g'(x_0)=-\frac{2x_0}{2y_0}=-\frac{2}{4}=-\frac{1}{2}\ .$$

<u>D. 11. 12.</u> (*Homogenität, Homogenitätsgrad*)
Eine Funktion f heißt *homogen vom Grade* r, wenn für alle $x\in D(f)$ und alle $\lambda\in R^1,\ \lambda>0$ gilt:

$$\lambda\cdot x\in D(f) \text{ und } f(\lambda\cdot x)=\lambda^r\cdot f(x)\ .$$

Dabei heißt $r\in R^1$ der *Homogenitätsgrad von* f.

<u>BS. 11. 5.</u>
Die Produktionsfunktion eines Unternehmens für die Herstellung einer Ware aus den Produktionsfaktoren Arbeitskraft (in x ME) und Rohstoff r (in y ME) wurde zu

$$h(x,y)=2x^3+y^3+0.5x^2y$$

ermittelt.
Es gilt

$$h(\lambda\cdot x,\lambda\cdot y)=2\cdot(\lambda x)^3+(\lambda y)^3+0.5\cdot(\lambda x)^2\cdot(\lambda y)$$

$$=\lambda^3\cdot h(x,y)\ .$$

Man sieht, dass bei Vervielfachung der unabhängigen Variablen x und y um den gleichen Faktor λ die Produktion $h(x,y)$ auf das λ^3-fache steigt. Der Homogenitätsgrad der Funktion ist also gleich 3.

B. 11. 11.
Der Homogenitätsgrad kann jeden beliebigen reellen Wert annehmen. Im eindimensionalen Fall sind die Potenzfunktionen

$$f(x) = ax^r, \quad a \in R^1,\ a \neq 0`,$$

homogene Funktionen von Grade r.

S. 11. 5.
Die Funktion $f: D(f) \to R^1,\ D(f) \subseteq R^n$ sei homogen vom Grade r. Dann gilt die *Eulersche Formel*:

$$r \cdot f\left(x_1, ..., x_n\right) = \sum_{i=1}^{n} f_{x_i}\left(x_1, ..., x_n\right) \cdot x_i .$$

Gilt umgekehrt die obige Beziehung für eine Funktion f an allen Stellen ihres Definitionsbereiches, so ist f homogen von Grade r.

BS. 11. 6.
Für die Funktion

$$h(x, y) = 2x^3 + y^3 + 0.5x^2 y$$

gilt:

$$h_x(x, y) \cdot x = 6x^3 + x^2 y, \qquad h_y(x, y) = 3y^3 + 0.5x^2 y .$$

Die Addition beider Gleichungen ergibt

$$h_x(x, y) \cdot x + h_y(x, y) = 6x^3 + 3y^3 + 1.5x^2 y = 3 \cdot h\left(x, x\right).$$

D. 11. 13. (*Konvexität, Konkavität*)
Der Definitionsbereich $D(f) \subseteq R^n$ einer reellwertigen Funktion f sei eine konvexe Punktmenge.
Dann heißt die Funktion f
1. *konvex*, falls für alle Stellen $x^1, x^2 \in D(f)$ und für alle $\lambda \in [0,\ 1]$ gilt:

$$f\left(\lambda \cdot x^1 + (1-\lambda) \cdot x^2\right) \leq \lambda \cdot f\left(x^1\right) + (1-\lambda) \cdot f\left(x^2\right),$$

2. *konkav*, falls für alle Stellen $x^1, x^2 \in D(f)$ und für alle $\lambda \in [0,\ 1]$ gilt:

$$f\left(\lambda \cdot x^1 + (1-\lambda) \cdot x^2\right) \geq \lambda \cdot f\left(x^1\right) + (1-\lambda) \cdot f\left(x^2\right),$$

3. *streng konvex* bzw. *streng konkav*, falls für alle Stellen, $x^1, x^2 \in D(f),\ x^1 \neq` x^2$ und für alle $\lambda \in]0,\ 1[$ gilt:

$$f\left(\lambda \cdot x^1 + (1-\lambda) \cdot x^2\right) < \lambda \cdot f\left(x^1\right) + (1-\lambda) \cdot f\left(x^2\right)$$

bzw.

$$f\left(\lambda \cdot x^1 + (1-\lambda) \cdot x^2\right) > \lambda \cdot f\left(x^1\right) + (1-\lambda) \cdot f\left(x^2\right)$$

(Letzte Aktualisierung:15.05.06)