Kapitel XI
Funktionen mit mehreren Variablen
(Lösungen)

11. 1..

1.

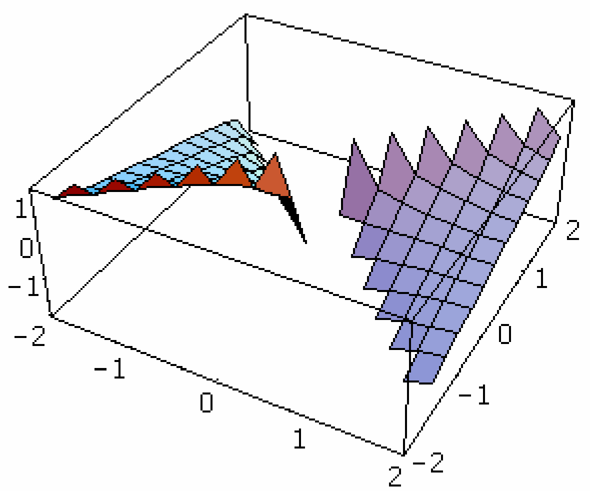
$$1-e^{x+y}>0 \quad \Leftrightarrow \quad e^{x+1}<1 \quad \Leftrightarrow \quad x+y<0 \;\; y<-x$$

f ist also erklärt für alle Punkte unterhalb der Geraden $y=-x$.

2.

$$\left|\frac{y}{x}\right|\le 1 \quad \Leftrightarrow \quad |y|\le|x|$$

f ist also erklärt für alle Punkte zwischen den Geraden $y=x$ und $y=-x$, einschließlich der Punkte dieser Geraden selbst, Nullpunkt ausgeschlossen.



11. 2.

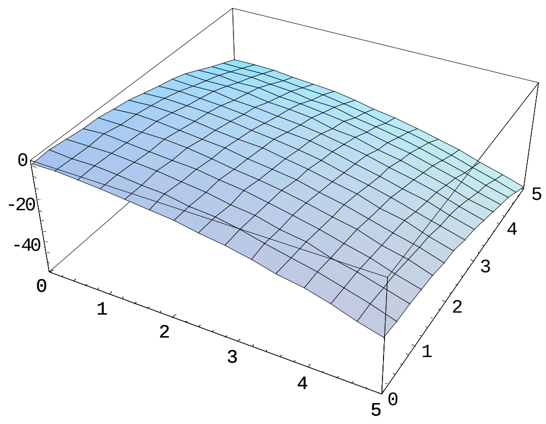
$$z=f(x,y)=-\frac{1}{2}x+-2y+2, \quad (x,y)\in R^2 .$$

Das sind alle Punkte der x_1,x_2 – Ebene innerhalb und auf der Peripherie des Einheitskreises um den Koordinatenursprung.

$$D(f)=\left\{(x_1,x_2)\,|\,x_1\in R^1 \wedge x_2\in R^1 \wedge x_1^2+x_2^2\le 1\right\}.$$

Damit ergibt sich

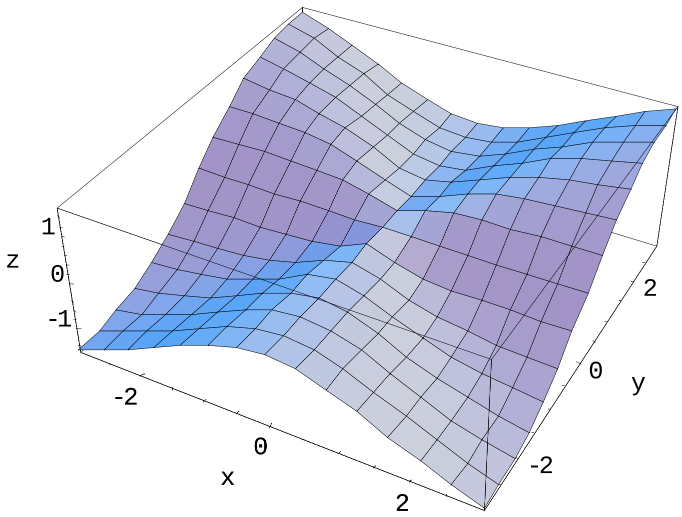
$$W(f)=\left\{y\,|\,0\le y\le 1\right\}.$$



11. 3.

1.

$$0 \leq \left| \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \right| \leq |y|, 0, \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} = 0$$



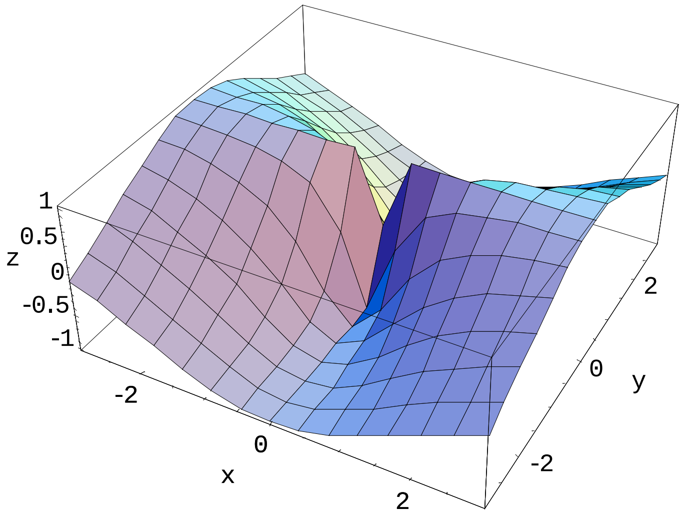
2.

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ existiert nicht, denn für Folge

$$\left\{ \frac{1}{n}, 0 \right\} \text{gilt:} \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}} = 1$$

und für Folge

$\left\{0, \frac{1}{n}\right\}$ gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = \dfrac{-\dfrac{1}{n^2}}{\dfrac{1}{n^2}} = -1$



11. 5.

$$z = f(x,y) = -\frac{1}{2}x + -2y + 2, \quad (x,y) \in R^2$$

1. $z = 0$, Schnittkurve mit der $x-y-$Ebene:

   $P(x,y); \quad -\frac{1}{2}x - 2y + 2 = 0, \quad y = -\frac{1}{4}x + 1$

   Es handelt sich um eine Gerade, die durch die Punkte $P_1(0,\ 1)$ und $P_2(4,\ 0)$ geht.

2. $x = 0$, Schnittkurve mit der $y-z-$Ebene:

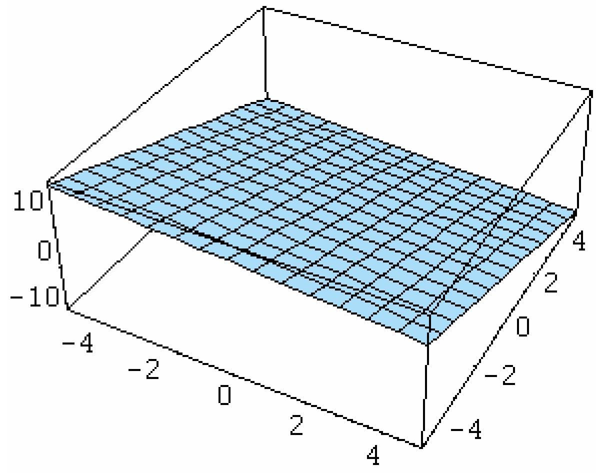
   $P(y,z); \quad z = -2y + 2,$

   Es handelt sich um eine Gerade, die durch die Punkte $P_1(0,\ 2)$ und $P_2(1,\ 0)$ geht.

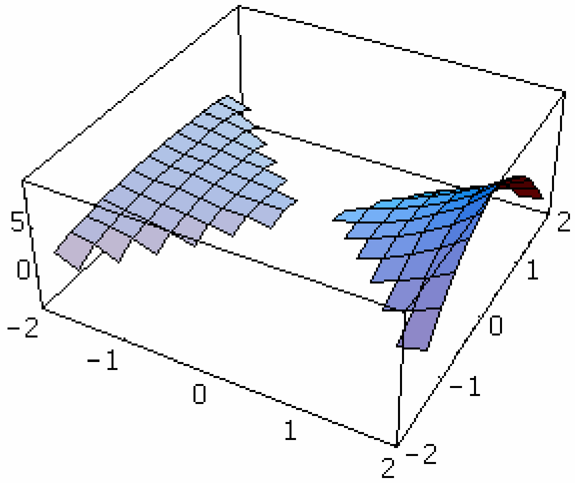
3. $y = 0$, Schnittkurve mit der $x-z-$Ebene:

   $P(x,z); \quad z = -\frac{1}{2}x + 2,$

   Es handelt sich um eine Gerade, die durch die Punkte $P_1(0,\ 2)$ und $P_2(4,\ 0)$ geht.



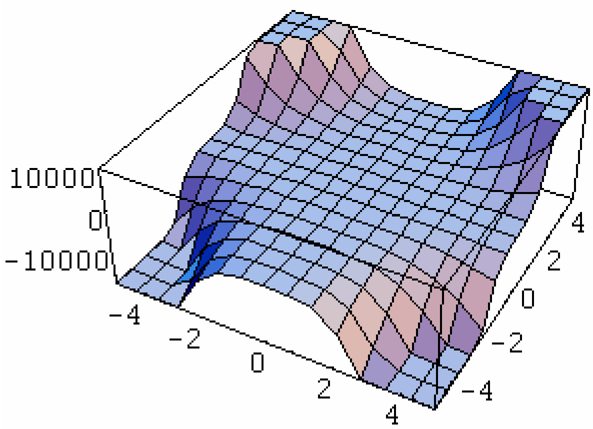
11. 7.



$$\frac{\partial z}{\partial x} = f_x = e^x \cdot \cos y + \frac{2x}{2 \cdot \sqrt{x^2 - y^2}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = f_y = -e^x \cdot \sin y + \frac{-y}{\sqrt{x^2 - y^2}}$$

11. 10.



$$z_x = 8x^3y^3 - 2$$

$$z_{xx} = 24x^2y^3$$

$$z_{xxx} = 48xy^3$$
$$z_{xxy} = 72x^2y^2$$

$$z_{xy} = 24x^3y^2$$

$$z_{xyx} = 72x^2y^2$$
$$z_{xyy} = 48x^3y$$

$$z_y = 6x^4y^2 + 3$$

$$z_{yy} = 12x^4y$$

$$z_{yyx} = 48x^3y$$
$$z_{yyy} = 12x^4$$

$$z_{yx} = 24x^3y^2$$

$$z_{yxx} = 72x^2y^2$$
$$z_{yxy} = 48x^3y$$

11. 14.

$$f_x(x,y) = \frac{1}{y}, \qquad f_y(x,y) = -\frac{x}{y^2},$$

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{1}{y},\ -\frac{x}{y^2}\right), \qquad \nabla f(x_0,y_0) = \left(\frac{1}{20},\ -\frac{1}{40}\right).$$

11. 16.
Die Niveaulinien $c > -5$ sind Kreise um den Nullpunkt. Die Gleichung $f(x,y) = 0$ beschreibt somit keine Funktion in impliziter Form

$$y = \pm\sqrt{5 - x^2}\ .$$

Beispielweise sind dem Wert $x_0 = 1$ die Werte $y_{01} = 2,\ y_{02} = -2$ zugeordnet. Wir machen also die Einschränkungen $y \geq 0$ und $x \in \left[-\sqrt{5},\ \sqrt{5}\right]$.

Es ergibt sich der eingeschränkte Definitionsbereich

$$\left\{(x, y)^T \mid -\sqrt{5} \le x \le \sqrt{5},\ y \ge 0\right\}.$$

Die Ableitung von $y = g(x)$ an der Stelle $x_0 = 1$ lautet

$$g'(x_0) = -\frac{2x_0}{2y_0} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}.$$

11. 18.

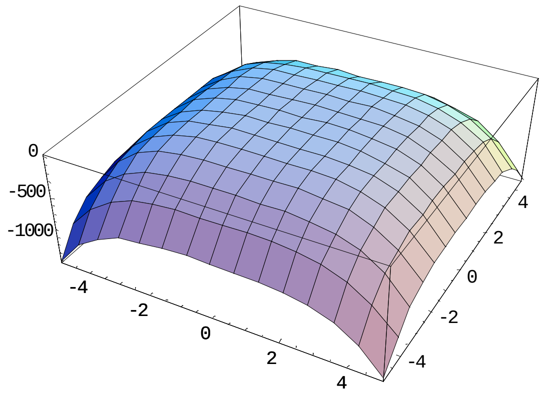
$f(x, y)$ ist auf der konvexen Menge $D(f) \subseteq R^2$ konkav genau dann, wenn gilt:

$$f_{xx} \le 0, \quad f_{yy} \le 0, \quad f_{xx} \cdot f_{yy} \ge \left(f_{xy}\right)^2, \quad \forall (x, y) \in D(f):$$

$$f_x(x, y) = -4x^3 - 2x, \qquad f_y(x, y) = -4y^3 - 2y, \quad \forall (x, y) \in D(f).$$
$$f_{xx}(x, y) = -12x^2 - 2 \le 0, \quad f_{yy}(x, y) = -12y^2 - 2 \le 0, \quad f_{xy} = f_{yx} = 0, \quad \forall (x, y) \in D(f).$$

$$f_{xx}(x, y) \cdot f_{yy}(x, y) = \left(-12x^2 - 2\right) \cdot \left(-12y^2 2\right) \ge 0, \ \forall (x, y) \in D(f).$$

Da R^2 eine konvexe Punktmenge ist, ist $f(x, y)$ auf R^2 konkav.



11. 20.

1.

$$f_x(x, y) = 3x^2 + 14x - 4y - 45, \qquad f_y(x, y) = -4x + 2y$$

$$\begin{cases} 3x^2 + 14x - 4y - 45 = 0 \\ \quad -4x + 2y \qquad = 0 \end{cases}$$

$$3x^2 + 6x - 45 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 3, \ x_2 = -5$$
$$\Rightarrow \quad y_1 = 6, \ y_2 = -10$$

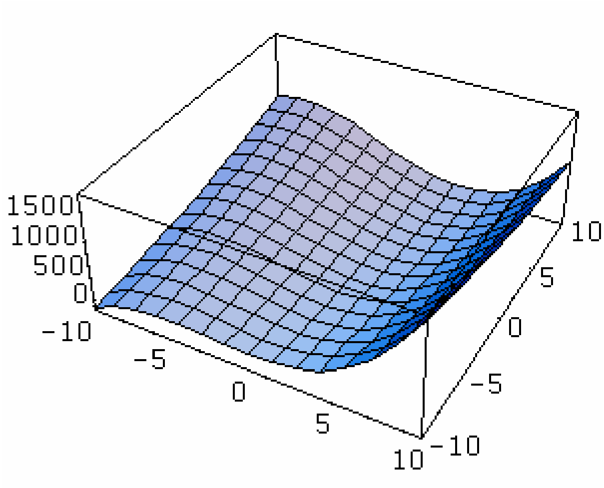
Stationäre Punkte: $P_1(3,\ 6)$, $P_2(-5,\ -10)$.

$f_{xx}(x,y) = 6x + 14,\quad f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = -4,\quad f_{yy}(x,y) = 2.$

$D(x,y) = f_{xx}(x,y)\cdot f_{yy}(x,y) - \left(f_{xy}(x,y)\right)^2 = 2\cdot(6x+14) - (-4)^2$

$D(3,6) = 48 > 0,\quad f_{xx}(3,6) = 22 > 0 \quad\Rightarrow\quad (3,\ 6)$ ist ein relatives Minimum von $f(x,y)$

$D(-5,-10) = -48 < 0 \quad\Rightarrow$ in $(-5,\ -10)$ liegt kein relatives Extremum vor.



2.

$$f_{x_1}(x_1,x_2) = -6x_1^2 - 6x_1 + 72$$

$$f_{x_2}(x_1,x_2) = -2x_2 + 8$$

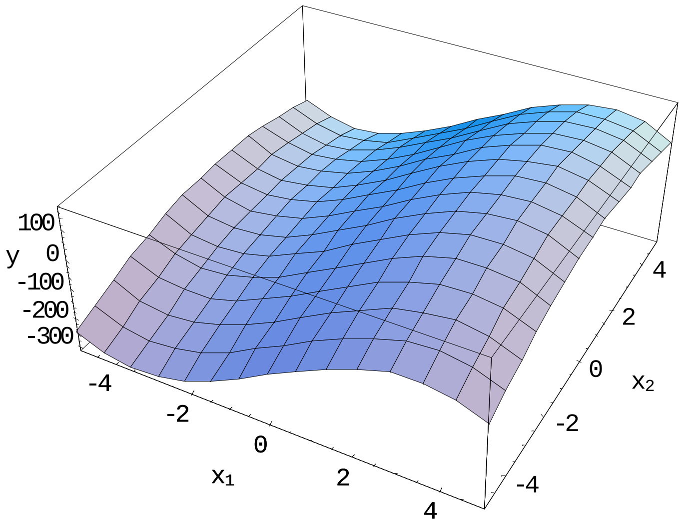
$$\begin{cases} f_{x_1}(x_1,x_2) = 0 \\ f_{x_2}(x_1,x_2) = 0 \end{cases} \Rightarrow\quad x^1 = (-4 \quad 4),\quad x^2 = (3 \quad 4)$$

$$f_{x_1x_1}(x_1,x_2) = -12x_1 - 6,\quad f_{x_1x_2}(x_1,x_2) = f_{x_2x_1}(x_1,x_2) = 0,\quad f_{x_2x_2}(x_1,x_2) = -2$$

$$D(x_1,x_2) = 24x_1 + 12$$

$D(-4,4) < 0 \quad\Rightarrow\quad$ kein Extremum

$D(2,4) > 0 \quad\Rightarrow\quad$ Extremum und wegen $f_{x_1,x_2}(2,4) < 0$: $\Rightarrow$ relatives Maximum.



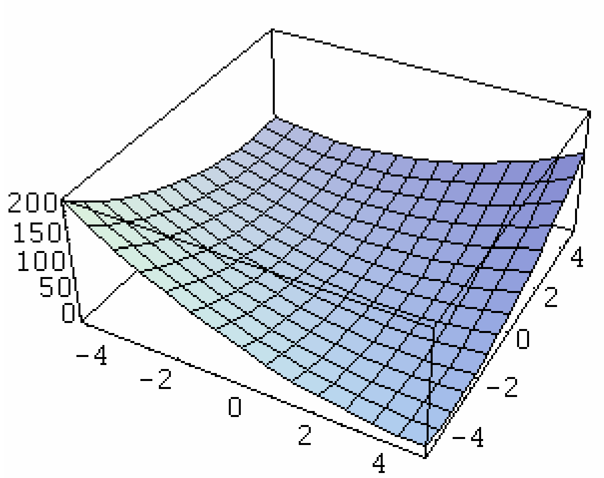
23.

$$f_{x_1}\left(x_1, x_2\right) = 2ax_1 + 3x_2 - 5, \qquad f_{x_1}(2,\text{-}1) = 0 \;\Rightarrow\; a = 2$$

$$f_{x_1}\left(x_1, x_2\right) = 3x_1 + 2bx_2 - 2, \qquad f_{x_1}(2,\text{-}1) = 0 \;\Rightarrow\; \mathrm{b} = 2$$

$$f_{x_1x_1} = 4, \quad f_{x_2x_2} = 4, \quad f_{x_1x_2} = 3.$$

Für $(x_1, x_2) = (2, -1)$ ist $D = 16 - 9 > 0,\; f_{x_1x_1} > 0$. Damit wird in $(2, -1)$ ein relatives Maximum realisiert.



(Letzte Aktualisierung: 7.10.09)