Kapitel XI
Funktionen mit mehreren Variablen
(Aufgaben)

11. 1.
Bestimmen Sie alle Punkte $P(x,y)$, für die folgende Funktionen erklärt werden können:

1. $f(x,y) = \ln\left(1 - e^{x+y}\right)$

2. $f(x,y) = \arcsin\dfrac{y}{x}$

11. 2.
Bestimmen Sie den größtmöglichen Definitionsbereich der Funktion

$$y = f(x_1,x_2) = \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}\ , \quad (x_1,x_2) \in D(f)$$

11. 3.
Die folgenden Funktionen $f(x,y)$ sind für $(x,y) \neq (0,0)$ erklärt. Untersuchen Sie, ob $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ existiert:

1. $f(x,y) = \dfrac{x^2 y}{x^2 + y^2}$; 2. $f(x,y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$

11. 5.
Fall die Fläche $z = f(x,y)$ im R^3 die $x,y-$Ebene schneidet, entsteht in dieser Ebene eine Schnittkurve für $z = 0$. Ebenso können Schnittkurven mit der $y,z-$Ebene für $x = 0$ bzw. mit der $x,z-$Ebene für $y = 0$ entstehen. Diese Schnittkurven mit den Koordinatenebenen unterstützen möglicherweise eine geometrische Veranschaulichung der durch $z = f(x,y)$ erzeugte Fläche.
Versuchen Sie sich auf diese Weise die Funktion

$$z = f(x,y) = -\frac{1}{2}x + -2y + 2, \quad (x,y) \in R^2$$

zu veranschaulichen.

11. 7.
Für

$$z = f(x,y) = e^x \cdot \cos y + \sqrt{x^2 - y^2}, \quad (x,y) \in D(f)$$

sind die partiellen Ableitungen 1. Ordnung zu bilden

11. 10.
Gegeben sei die Funktion

$$z = f(x, y) = 2x^4 \cdot y^3 - 2x + 3y \,.$$

Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen 3. Ordnung dieser Funktion.

11. 14.
Eine Wirkungsgröße z hängt von zwei sie beeinflussenden Faktoren ab:

$$z = f(x, y) = \frac{x}{y} \,.$$

Bestimmen Sie mittels des Gradienten der Funktion, in welcher Richtung der $(x, y)-$Ebene die Wirkungsgröße z den größten Zuwachs enthält, wenn vom Punkt $(x_0, y_0) = (10,\ 20)$ ausgegangen wird.

11. 16.
Gegeben sei die Funktion

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 5, \quad D(f) \subseteq R^2 \,.$$

Schränken Sie den Definitionsbereich $D(f)$ so ein, dass durch $f(x, y) = 0$ implizit eine Funktion $y = g(x)$ definiert wird und bestimmen Sie die Ableitung $g'(x_0)$ für $x_0 = 1$.

11. 18.
Untersuchen Sie, ob die Funktion

$$f(x, y) = -x^4 - y^4 - x^2 - y^2$$

auf $D(f) = R^2$ konvex bzw. konkav ist.

11. 20.
Von den nachfolgenden Funktionen sind alle stationären Punkte zu ermitteln und diese auf Extremwerte zu untersuchen.

1. $z = f(x, y) = x^3 + 7x^2 - 4xy + y^2 - 45y, \quad (x, y) \in R^2$
2, $y = f(x_1, x_2) = -2x_1^3 - 3x_1^2 + 72x_1 - x_2^2 + 8x_2, \quad (x_1, x_2) \in R^2$

11. 23.
Gegeben sei die Funktion

$$y = f(x_1, x_2) = a_1^2 + 3x_1 \cdot x_2 + bx_2^2 - 5x_1 - 2x_2 + 5, \quad (x_1, x_2) \in R^2 \,.$$

Bestimmen Sie a und b, so dass in $(x_1, x_2) = (2,\ -1)$ ein stationärer Punkt vorliegt.

Setzen Sie a und b in $f(x_1, x_2)$ ein, und überprüfen Sie diese auf mögliche relative Extremwerte.

(Letzte Aktualisierung: 7.10.09)