Kapitel X

Das uneigentliche Integral

B. 10. 1
Bei der Definition des bestimmten (Riemann-schen) Integrals wurde vorausgesetzt:

1. Das Intervall $[a,\ b]$ ist endlich.
2. Die Funktion $f(x)$ ist auf $[a,\ b]$ beschränkt.

Ist eine dieser Voraussetzungen nicht erfüllt, kann man versuchen, durch einen geeigneten Grenzprozess dem Integral einen vernünftigen Sinn zu geben.
Existiert bei diesem Grenzprozess der Grenzwert, so spricht man von einem „*uneigentlichen Integral mit unendlichen Grenzen*“ (im 1. Fall) bzw. „*mit nichtbeschränkter Funktion*“ (im 2. Fall). Natürlich ist auch eine Kombination der beiden Fälle möglich.

D. 10. 1. (***Konvergenz und Divergenz***)

$$\int_a^\infty f(x)dx := \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx\,.$$

(Vorausgesetzt wird hierbei natürlich, dass die Funktion $f(x)$ auf jedem endlichen Teilintervall $[a,\ b]$ integrierbar ist und der Grenzwert $G := \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx$ existiert.

Wenn der Grenzwert G existiert und endlich ist, so sagt man, *das uneigentliche Integral existiert* bzw. *konvergiert*. Existiert G nicht, so spricht man von einem *divergenten uneigentlichen Integral*. Hierzu zählen auch die Fälle $G=-\infty$ und $G=+\infty$.

D. 10. 2. (***Konvergenz und Divergenz***)

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx := \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx\,.$$

(Voraussetzungen und Bezeichnungen: analog D. 10. 1.)

D. 10. 3. (***Konvergenz und Divergenz***)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx := \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)dx,\quad c\in \mathbb{R}^1:\ \text{beliebig}\,.$$

Hierbei wird vorausgesetzt, dass die rechts stehenden uneigentlichen Integrale – die zu den in D. 10. 1. – D. 10. 2. eingeführten Typen gehören – existieren.
(Die Definition ist unabhängig von der Wahl der Zahl c. Bei der Berechnung eines konkreten Beispiels kann man z. B. $c=0$).

B. 10. 2.
Die Definition D. 10. 3. kann alternativ folgendermaßen umformuliert werden:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx := \lim_{\substack{a\to-\infty \\ b\to+\infty}} \int_a^b f(x)dx \,.$$

Dabei gehen a und b *unabhängig voneinander gegen* $-\infty$ bzw. $+\infty$

BS. 10. 1.
Man untersuche, ob das uneigentliche Integral

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx$$

existiert (konvergiert) oder nicht.

Lösung:
Es gilt

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx = \lim_{b\to+\infty} \int_1^b \frac{1}{x^2}dx = \lim_{b\to+\infty}\left(\left[-\frac{1}{x}\right]_1^b\right) = \lim_{b\to+\infty}\left(1-\frac{1}{b}\right) = 1 \,.$$

Geometrische Interpretation:
Der Flächeninhalt der zwischen der Kurve

$$y = \frac{1}{x^2}, \quad 1 \le x < +\infty$$

und der $x-$Achse liegenden Bereichs ist gleich 1:

BS. 10. 2.
Man untersuche, ob das uneigentliche Integral

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}dx$$

existiert (konvergiert) oder nicht.

Lösung:
Es gilt

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}dx = \lim_{b\to+\infty} \int_1^b \frac{1}{x}dx = \lim_{b\to+\infty}\left(\left[\ln|x|\right]_1^b\right) = \lim_{b\to+\infty}\left(\ln b - \ln 1\right) = +\infty \,.$$

Damit ist das Integral $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}dx$ divergent.

BS. 10. 3.

Man untersuche, für welche Werte $\alpha \in R^1$ das uneigentliche Integral

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx$$

konvergiert und für welche es divergiert.

Lösung:

Sei $\alpha \neq 1$:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^{b} x^{-\alpha}dx = \lim_{b\to\infty}\left[\frac{1}{1-\alpha}\cdot x^{1-\alpha}\right]_1^b$$

$$= \lim_{b\to\infty}\frac{1}{1-\alpha}\left(b^{1-\alpha}-1\right) = \begin{cases} +\infty, & \text{falls} \quad \alpha < 1 \\ \dfrac{1}{\alpha-1} & \text{falls} \quad \alpha > 1 \end{cases}.$$

(Im Falle $\alpha < 1$ ist $1-\alpha > 0$ und $\lim\limits_{b\to\infty} b^{1-\alpha} = \infty$; Im Falle $\alpha > 1$ ist $1-\alpha < 0$,

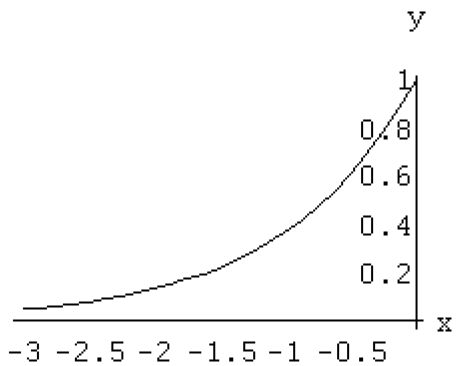
$\alpha - 1 > 0$ und $\lim\limits_{b\to\infty} b^{1-\alpha} = \lim\limits_{b\to\infty}\dfrac{1}{b^{\alpha-1}} = 0$).

Damit konvergiert das uneigentliche Integral $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^\alpha}dx$ für $\alpha > 1$; es divergiert für $\alpha \le 1$. Für $\alpha > 1$ gilt: $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^\alpha}dx = \frac{1}{\alpha-1}$.

Das Konvergenzverhalten des Integrals ändert sich nicht, wenn für die untere Integrationsgrenze eine Zahl $\alpha > 1$ gewählt wird.

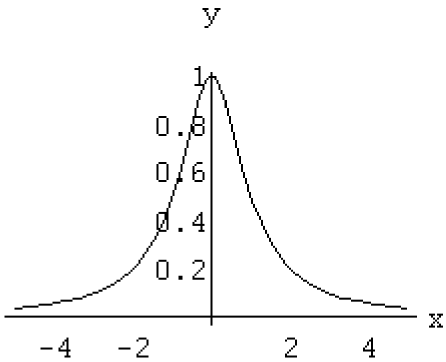
BS. 10. 4.

$$\int_{-\infty}^{0} e^x dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^0 e^x dx = \lim_{a\to-\infty}\left(e_0 - e^a\right) = 1$$



BS. 10. 5.

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{1+x^2}+\int_{0}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}$$
$$=\lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0}\frac{dx}{1+x^2}+\lim_{b\to+\infty}\int_{0}^{b}\frac{dx}{1+x^2}$$
$$=\lim_{a\to-\infty}\left(\arctan 0-\arctan a\right)+\lim_{b\to+\infty}\left(\arctan b-\arctan 0\right)$$
$$=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\pi\,.$$



B. 10. 3.

Das uneigentliche Integral $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ war wie folgt definiert:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to+\infty}}\int_{a}^{b} f(x)dx\,.$$

Hierbei war wesentlich, dass die Integrationsgrenzen a und b *unabhängig* voneinander gegen $-\infty$ bzw. $+\infty$ gehen. Würde man z.B. $a=-3b$ wählen, so wären a und b voneinander anhängig; mit $b\to\infty$ würde dann automatisch $a\to-\infty$ gelten.
Wählt man $a=-b$, so gelangt man zum sog. Cuachschen Hauptwert des uneigentlichen Integrals:

D. 10. 4. (*Cauchyscher Hauptwert*)
Unter dem *Cauchyschen Hauptwert* des uneigentlichen Integral der Funktion $f(x)$ über dem Intervall $]-\infty,\ +\infty[$ versteht man den Grenzwert

$$\lim_{\omega\to\infty}\int_{-\omega}^{+\omega} f(x)dx\,.$$

Dieser Grenzwert wird – falls er existiert – durch das Symbol

$$CH\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$$

bezeichnet.

B. 10. 4.

Aus D. 10. 3. folgt, dass aus der Existenz des uneigentlichen Integrals $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ die Existenz des Cauchyschen Hauptwerte $CH\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ folgt und die beiden Integrale gleich sind.

Die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht. Das folgende Beispiel demonstriert diesen Sachverhalt:

BS. 10. 6.

Wir zeigen, dass $CH\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{x^2+3}dx$ existiert:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{x^2+3}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+3} = \ln\left(x^2+3\right)+C$$

$$\lim_{\omega\to\infty}\int_{-\omega}^{+\omega} \frac{x}{x^2+3}dx = \lim_{\omega\to\infty}\left(\frac{1}{2}\ln\left(\omega^2+3\right)\right) = -\frac{1}{2}\ln\left((-\omega)^2+3\right) = \lim_{\omega\to\infty} 0 = 0 .$$

Nun zeigen wir aber, dass $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{x^2+3}dx$ nicht existiert:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{x^2+3}dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{x}{x^2+3}dx + \int_{0}^{+\infty} \frac{x}{x^2+3}dx .$$

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{x}{x^2+3}dx = \lim_{a\to-\infty} + \int_{a}^{0} \frac{x}{x^2+3}dx = \frac{1}{2}\ln 3 - \ln\left(a^2+3\right) = -\infty .$$

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{x}{x^2+3}dx = ... = +\infty .$$

S. 10. 1. **(*Majorantenkriterium für uneigentliche Integral*)**

Ist die Funktion $f(x)$ für alle $x \geq a$ (a fest) nichtnegativ und gilt für eine weitere Funktion $g(x)$ die Ungleichung

$$0 \leq f(x) \leq g(x) ,$$

so folgt aus der Existenz von $\int_{a}^{+\infty} g(x)dx$ die Existenz von $\int_{a}^{+\infty} f(x)dx$.

Hierbei ist

$$\int_{a}^{+\infty} g(x)dx \leq \int_{a}^{+\infty} g(x)dx .$$

(Voraussetzung: $f(x)$ ist auf jedem Intervall $[a,\ b]$ mit $b > a$ stückweise stetig).

(Letzte Aktualisierung: 05.02.06)