Kapitel I
Zahlenfolgen- und Reihen

(Aufgaben)

1. 1.
Schreiben Sie die ersten 5 Glieder der Zahlenfolgen $\{a_n\}_{n\in N}$ mit

1. $a_n = \frac{1}{2^n}$,
2. $a_1 = 2, \quad a_{n+1} = a_n + 4.$

1. 2.
Wie lautet das allgemeine Glied folgender Folgen?

1. $-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ...$

2. 0, 4 0, 8, 0,...

1. 3.
Geben Sie mindestens 4 Teilfolgen der Folge

$$\left\{\frac{2-(-1)^n}{n}\right\}_{n\in N}$$

an.

1. 4.
Folgende Folgen sind auf Monotonie zu untersuchen:

1. $\left\{\frac{1}{n^2}\right\}_{n\in N}$,

2. $\{2n+(-1)^n\}_{n\in N}$,

3. $\{1+(-1)^n\}_{n\in N}$.

1. 5.
Folgende Folgen sind auf Beschränktheit zu untersuchen. Gegebenenfalls sind ihr Supremum und Infimum zu bestimmen.

1. $\left\{1+\frac{1}{n}\right\}_{n\in N}$, 2. $\left\{\frac{5}{1-2n}\right\}_{n\in N}$.

1. 6.
Folgende Grenzwerte sind definitorisch zu verifizieren

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n-1}{n+3}=2,$ b) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n-1}{2n+1}=\dfrac{3}{2}.$

1. 7.
Die Zahl $N \in \mathbf{N}$ ist so zu bestimmen, daß folgende Ungleichungen für alle $n > N$ gelten:

a) $\left|\dfrac{2n-1}{n+3}-2\right|<0.01,$ b) $\left|\dfrac{3n-1}{2n+1}-\dfrac{3}{2}\right|<0.001.$

1. 8.
Folgende Folgen sind auf Konvergenz zu untersuchen

a) $-1,\ -0.2,\ -0.03,..$

b) $a_n := \begin{cases} \dfrac{n}{n+1} & \text{für gerades n} \\ \dfrac{2n-1}{n} & \text{für ungerades n} \end{cases}$

1. 9.
Berechnen Sie folgende Grenzwerte

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n-1}{2n+1},$ b) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+1}{n^2+3},$ c) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2+\sqrt{n^3+2}}{n^2-n+1}.$

1. 10.
Berechnen Sie folgende Grenzwerte

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+n+1}{3-n},$ b) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt{n+1}}.$

1. 11.
Berechnen Sie den Grenzwert der Folge

$$a_1=\sqrt{2},\quad a_2=\sqrt{2+\sqrt{2}},\quad a_3=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}},\dots,a_n=\sqrt{2+a_{n-1}},\dots$$

1. 12.
Zeigen Sie, daß die Folge $\{n(1-(-1)^n)\}_{n\in N}$ weder einen eigentlichen noch einen uneigentlichen Grenzwert hat.

1. 13.
Zeigen Sie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{1}{3}.$$

1. 14.
Folgende Reihen sind auf Konvergenz zu untersuchen

a) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$, b) $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{3}{4} - \frac{1}{n})^n$.

1. 15.
Zeigen Sie, daß folgende Reihen konvergieren:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$, b) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^n}$.

1. 16.
Zeigen Sie, daß die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1+n}{2n}$$

divergiert.

1. 17.
Ein Arbeiter hat im Jahr 2004 durchschnittlich 24000,- € pro Jahr brutto verdient. Angenommen, jemand versucht, eine konstante jährliche Lohnsteigerungsrate von 12% pro Jahr durchzusetzen.

a) Wie hoch wäre das Bruttoeinkommen im Jahre 2030?

b) Wann etwa würde der Arbeiter durchschnittlich jährlich 1 Million € brutto verdienen?

(Letzte Aktualisierung: 24.02.05)