Aufgaben zur Anwendung
der
Analysis in der Ökonomie
(Teil 3)

(1)

Bei der Einführung eines neuartigen Produktes sind für den Absatz y in den folgenden 36 Monaten steigende Absatzzahlen vorhergesagt. Die Wachstumsrate w wird in Abhängigkeit von $t \in [0, 36]$ durch

$$w(t) = \frac{1}{48}\sqrt{t}$$

geschätzt.

1. Ermitteln Sie den Absatz $y(t)$ in Abhängigkeit von t, wenn der Absatz $y(36)$ um 191 Einheiten über dem Absatz $y(0)$ liegt.
2. Berechnen Sie näherungsweise $y(0), y(12), y(24), y(36)$ sowie das proportionale Wachstum für $t = 24$ und $t = 36$.
3. Ermitteln Sie 1., wenn die Wachstumsrate konstant ist mit $w(t) = 0.1$ und berechnen Sie $y(0), y(36)$.

(2)

Zwischen den Grenzkosten $K_i'(x)$ und den Durchschnittskosten $\frac{K_i(x)}{x}$, $i = 1, 2,$ sei alternativ der Zusammenhang

$$I) \qquad K_1'(x) = a \cdot \frac{K_1(x)}{x}, \qquad 0 < a < \infty$$

$$II) \qquad K_2'(x) = \frac{K_2(x) - b}{x}, \qquad 0 < b < K_2(x)$$

angenommen.

1. Berechnen Sie $K_1(x),\ K_2(x)$ mit $K_1(1) = K_2(1) = 5$.
2. Diskutieren Sie für die Fälle $a = b = 1,\ \ a = b = \frac{1}{2},\ \ a = b = 2$ und jeweils $x \geq 1$ welcher Kostenverlauf für die Unternehmung günstiger erscheint.

(3)

Für die jährliche Staatsverschuldung $s(t)$ in Abhängigkeit von der Zeit $t > 0$ gelte die Beziehung

$$t^a s'(t) = bs(t), \quad a \in \mathbb{N},\ b > 0 .$$

1. Geben Sie s als explizite Funktion von t an.
2. Mit $s(1) = 10,\ \ a = 0.5,\ \ b = 0.1$ bestimmen Sie die Staatsverschuldung für $t = 25$. Bis zu welchem Zeitpunkt t verdoppelt sich die Staatsverschuldung gegenüber $s(1) = 10$?

(4)

Anstatt einer logistischen Funktion kann für den Verlauf des Absatzes eines Produktes in Abhängigkeit von der Zeit $t \geq 0$ auch eine sogenannte Gompertzfunktion

$$y'(t) = ay(t)b^t, \quad a > 0,\ \ b \in [0,1]$$

angenommen werden. $y(t)$ schreibt den bis zum Zeitpunkt t getätigten Absatz, a und b sind Modellkonstanten.

1. Bestimmen Sie y als explizite Funktion von t.
2. Zeigen Sie, daß die in 1. Erhaltene Integrationskonstante c mit dem Grenzwert $\lim\limits_{t\to\infty} y(t)$ übereinstimmt.
3. Berechnen Sie die Konstante a, falls die Werte $b = e^{-1}, c = 100,\ \ y(0) = 50$ bekannt sind und ermitteln Sie damit eine spezielle Lösung für $y(t)$.

(5)

Gegeben seien zwei voneinander unabhängige Ausbreitungsprozesse y, z, die den Differenzengleichungen

$$\begin{aligned} y(t+1) &= ty(t) + 1 \\ z(t+1) &= cz(t) + 1, \quad (c > 0) \end{aligned}$$

für $t = 0, 1, \ldots$ genügen.

1. Geben Sie für beide Fälle die Lösung in Abhängigkeit von $y(0)$ bzw. $z(0)$ an.
2. Vergleichen Sie die beiden mittleren Wachstumsraten für $t = t_0$ mit $y(t_0) = z(t_0)$ und $\Delta t_0 = 1$.
3. Berechnen Sie für $c = 2, (y(0), z(0)) = (0, 0)$ die Werte

$$(y(1), z(1)), (y(2), z(2)), (y(3), z(3)), (y(4), z(4))$$

sowie $(y(t), z(t))$ für $t \to \infty$.

(6)

Die Abnahme des Absatzes $y(t)$ eines Produktes in Abhängigkeit von der Zeit $t \geq 0$ ohne Werbeeinsatz sei proportional zum jeweiligen Absatzniveau. Wird für das Produkt geworben, so bewirkt dies eine Zunahme des Absatzes. Mit dem zeitabhängigen Werbeeinsatz $w(t)$ ergebe sich die Differentialgleichung

$$y'(t) = -ay(t) + w(t)\,.$$

Geben Sie die allgemeine Lösung für $y(100) = 100, a = 0.1$ an, wobei alternativ $w(t) = 0, w(t) = 6, w(t) 6 \sin(pt + 1)$ anzusetzen ist.